6

Primaria

# Aritmética

*Edición Digital*

Perú

GENIOMATIC

# Aritmética 6

Primaria

**Autor**
**Hernán Hernández Bautista**

Copyright©Hernán Hernández

Primera edición 2021

**Asesoría Académica**
Mg. Liz Limaylle Guzmán

**Diseño y Diagramación**
Gino Moisés Samamé Lobatón

**Editado por: GENIOMATIC E.I.R.L.**
Jr. Flosferri N° 616, Urb. Inca Manco Cápac II Etapa,
San Juan de Lurigancho, Lima
Telf.: (01) 767 0437
geniomaticeirl@gmail.com
www.geniomatic.com

**Primera edición:** Enero 2021

**EDICIÓN DITITAL 2021**

Obra producida por **GENIOMATIC E.I.R.L.**
Prohibida la reproducción total o parcial de este libro, por cualquier medio,
sin permiso escrito del autor.

# Cómo está organizado tu cuaderno de actividades

## PÁGINA INICIAL DE LA UNIDAD

***Número de la Unidad***

***Imagen secundaria***
Imagen que ilustra el mensaje del Enfoque Transversal sugerido para la unidad.

***Competencia***
Indica la competencia que desarrolla el Cuaderno de Actividades.

***Capacidades***
Contiene las capacidades correspondientes a la competencia.

***Imagen motivadora***
Imagen fotográfica que conecta una situación real con el tema de la unidad.

***Comentario del tema***
Importancia del tema como parte de las estructuras matemáticas.

***Enfoque transversal***
Breve mensaje que trata del tema transversal que se propone trabajar en la unidad.

***Desempeños***
Son los desempeños que tienes que realizar para desarrollar las respectivas capacidades.

## CONTENIDO DE LA UNIDAD

***Conocimientos previos***
Son los conocimientos previos que debes tener para abordar exitosamente el tema a tratar.

***Imagen***
Imagen que ilustra el contexto de la situación problemática inicial.

***Formalización***
Contiene definiciones, conceptos y generalizaciones de los contenidos matemáticos.

***Número del tema***

***Título del tema***

***Uso del TIC: Código QR***
Escaneando este código con tu teléfono celular podrás ver el video de la clase correspondiente al tema.

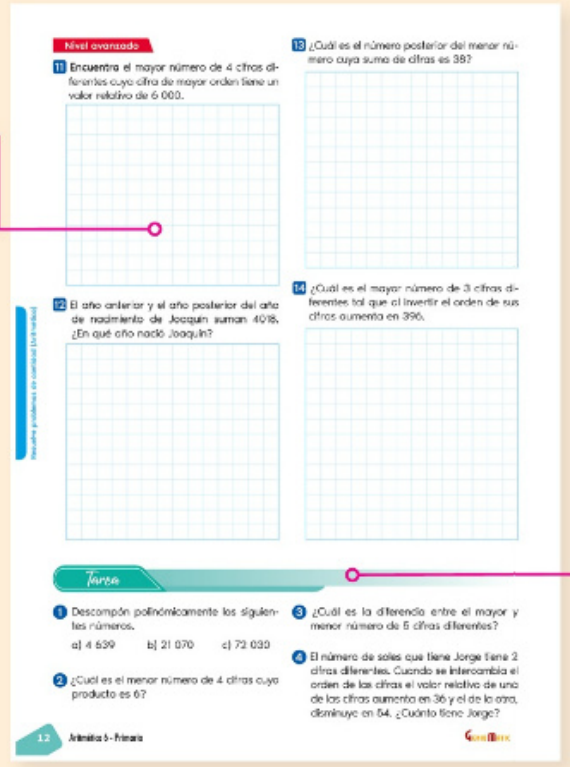
***Conflicto cognitivo***
Se formula una pregunta que explora los saberes previos y plantea un problema nuevo que deberás resolver con el desarrollo del tema.

***Información complementaria***
Lecturas, notas, observaciones, historias y recursos tecnológicos que contribuyen a reforzar y recrear el tema.

***Actividades***

Bajo el enfoque de resolución de problemas, los conceptos matemáticos adquieren significado en la medida en que nos ayudan a resolver diversos problemas del entorno real.

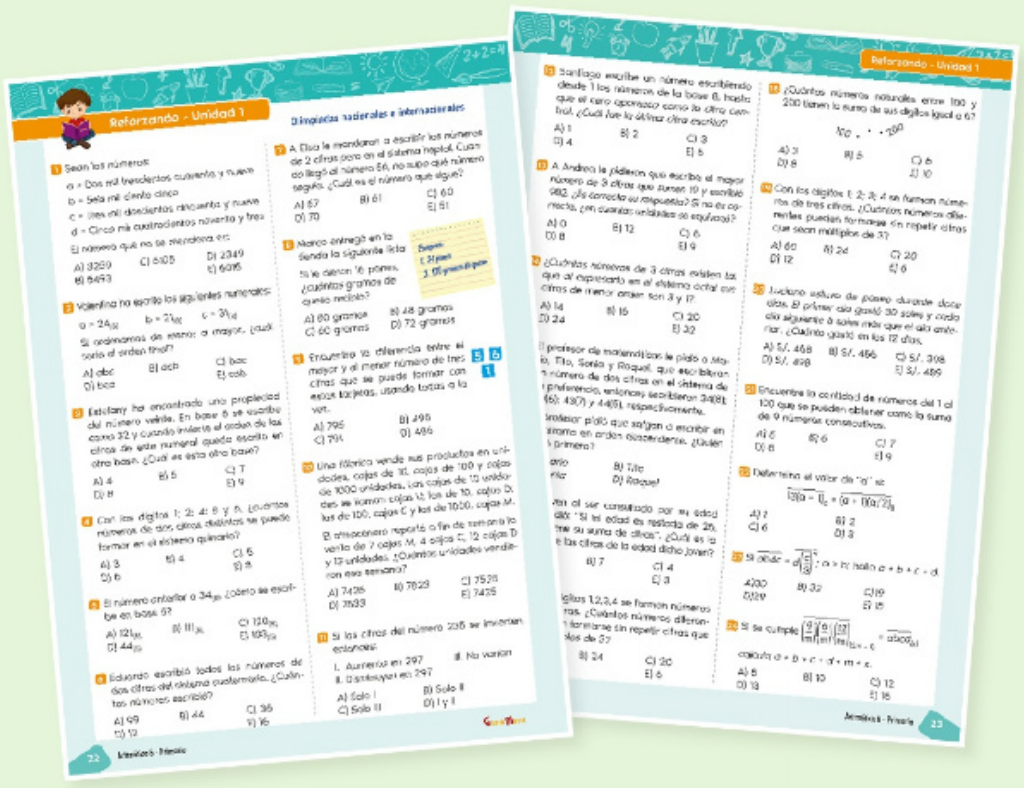
Se formulan un conjunto de problemas de diferentes contextos organizados según la demanda cognitiva.




***Actividades para la casa***

Problemas que debes desarrollar individualmente en casa para fortalecer y acentuar las estrategias utilizadas.

## REFORZANDO Y AUTOEVALUACIÓN

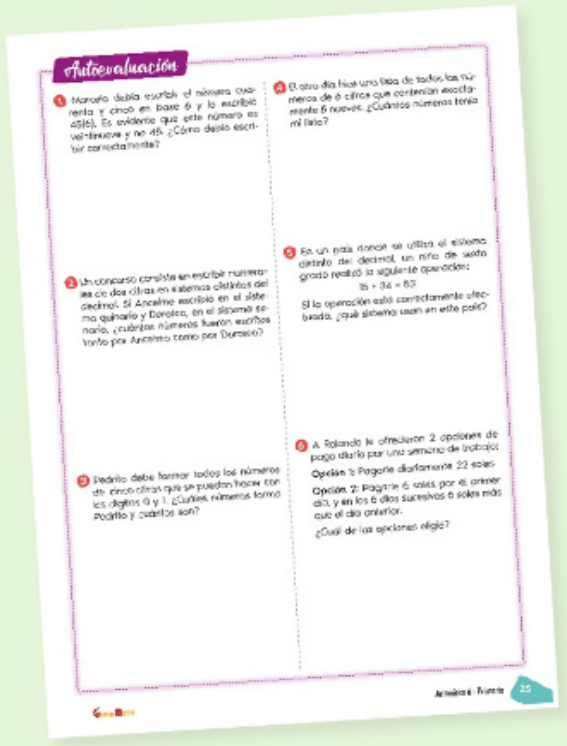



***Reforzando la unidad***

Luego de cada unidad se plantea un conjunto de problemas formulados en diversos concursos y olimpiadas nacionales e internacionales de matemáticas, que servirán para reforzar, complementar, profundizar y evaluar las capacidades desarrolladas durante el bimestre.

Son problemas variados de acuerdo a la demanda cognitiva, porque incluye diversas capacidades y competencias, así como de naturaleza intra y extra matemática.

Se ha enfatizado en formular preguntas y problemas contextualizados a fin de que el estudiante explore los conceptos matemáticos abstractos en situaciones reales.

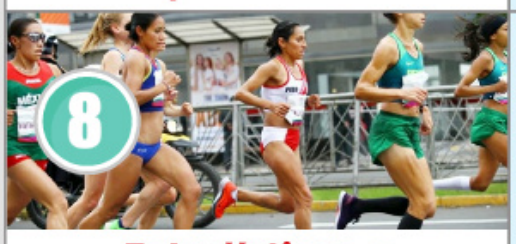



***Autoevaluación***

La autoevaluación es una necesidad para conocer el avance del estudiante respecto a su proceso de aprendizaje.

Contiene un conjunto de 6 a 8 preguntas que invitan al estudiante a dar una mirada introspectiva de su aprendizaje en los contenidos, las capacidades desarrolladas y en contextos intra matemáticos y extra matemáticos.

# Índice


| | UNIDAD | ENFOQUE TRANSVERSAL | CONTENIDO TEMÁTICO | |
|---|---|---|---|---|
| I Bimestre | 1 **Números naturales** | **ENFOQUE AMBIENTAL** Cuidemos el medio ambiente. | · Numeración decimal<br>· Numeración no decimal<br>· Adición de números naturales<br>· Reforzando - Unidad 1<br>· Autoevaluación | 7<br>13<br>18<br>22<br>25 |
| | 2 **Cuatro operaciones** | **ENFOQUE DE BÚSQUEDA DE EXCELENCIA** Nos organizamos para trabajar en equipo y lograr mejores resultados. | · Sustracción y complemento aritmético<br>· Multiplicación y división<br>· Operaciones combinadas<br>· Reforzando - Unidad 2<br>· Autoevaluación | 27<br>31<br>35<br>40<br>43 |
| II Bimestre | 3 **La divisibilidad** | **ENFOQUE DE DERECHOS** Respetamos las opiniones de los demás. | · Divisibilidad: principios<br>· Criterios divisibilidad por: 2; 4; 8: 5 y 25<br>· Criterios divisibilidad por: 3; 9; 11, 7 y 13<br>· Reforzando - Unidad 3<br>· Autoevaluación | 45<br>49<br>53<br>57<br>59 |
| | 4 **Propiedades de los números** | **ENFOQUE DE DERECHOS** Tenemos derecho a ser escuchados. | · Números primos<br>· MCM y MCD: Métodos de obtención<br>· MCM y MCD: Propiedades<br>· Reforzando - Unidad 4<br>· Autoevaluación | 61<br>66<br>70<br>74<br>77 |
| III Bimestre | 5 **Fracciones y decimales** | **ENFOQUE DE IGUALDAD DE GÉNERO** Valoramos el rol de la mujer en la sociedad. | · Fracciones: Adición y sustracción<br>· Fracciones: Multiplicación y división<br>· Números decimales<br>· Reforzando - Unidad 5<br>· Autoevaluación | 79<br>84<br>88<br>93<br>95 |
| | 6 **Proporcionalidad** | **ENFOQUE INTERCULTURAL** Estamos orgullosos de nuestra identidad nacional. | · Razones y proporciones<br>· Serie de razones<br>· Magnitudes proporcionales<br>· Reforzando - Unidad 6<br>· Autoevaluación | 97<br>101<br>105<br>109<br>111 |
| IV Bimestre | 7 **Regla de tres y tanto por ciento** | **ENFOQUE DE ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD** Tenemos derecho a la educación | · Regla de 3 simple y compuesta<br>· Tanto por ciento<br>· Aplicaciones del tanto por ciento. Regla de interés<br>· Reforzando - Unidad 7<br>· Autoevaluación | 113<br>117<br>121<br>125<br>127 |
| |  8 **Estadísticas y probabilidades** | **ENFOQUE DE ORIENTACIÓN AL BIEN COMÚN** Cuidamos los bienes de nuestro colegio. | · Tabla de frecuencias<br>· Gráficos estadísticos<br>· Medidas de tendencia central. Probabilidades.<br>· Reforzando - Unidad 8<br>· Autoevaluación | 129<br>133<br>137<br>141<br>143 |

# 1 Los números naturales

Los números naturales son la base fundamental de la Aritmética. Todos los días usamos más de una vez, para contar, en alguna medición o cuando realizamos compras.

## Cuidemos el medio ambiente

Así como cuidamos nuestra casa, manteniéndola limpia y ordenada, tenemos el deber de cuidar el medio ambiente, que es el espacio donde vivimos todos.
Protegemos el medio ambiente no botando las botellas y bolsas de plástico en el campo, no quemando cosas, apagando las luces y no dejando aparatos enchufados. Debemos cuidar principalmente el aire, el agua y las plantas.

| Resuelve problemas de cantidad (Aritmética) | |
|---|---|
| **Capacidades** | **Desempeños** |
| **Traduce cantidades a expresiones numéricas** | Lee y escribe los números naturales en el sistema decimal y no decimal hasta el noveno orden. |
| **Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones** | Organiza los números naturales por agrupación y representa en el tablero posicional. |
| **Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo** | Usa estrategias para expresar un número en bases diferentes. Resuelve problemas de adición. |
| **Argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones** | Expresa su comprensión del sistema de numeración decimal con números naturales hasta nueve cifras. |

# Numeración decimal

Adición de números naturales

En la fábrica de jabones de tocador de don Elías, los jabones se empaquetan en bolsas de 10 unidades, cajas medianas de 10 bolsas y cajas grandes de 10 cajas medianas.

VIDEO DE TEORÍA

**Responde:**

¿Cuántas bolsas, cajas medianas y cajas grandes se necesitan para empaquetar 8 759 jabones?

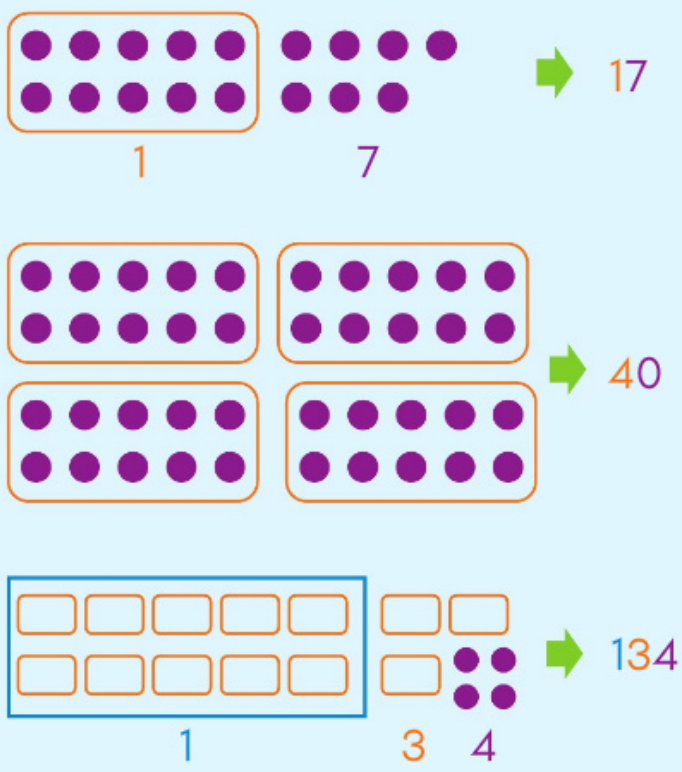
## ¿Cómo se forman los números?

Se forman por agrupación. Los números que usamos se forman agrupando de 10 en 10, por eso se denomina numeración **decimal o de base 10.**

Cada vez que se llega a 10 unidades, se forma un grupo llamado **decena**, para cuya representación se usa una cifra que se ubica a la izquierda de la cifra de unidades.

Cuando se llega a formar 10 grupos de 10, se vuelve a formar otro grupo, llamado **centenas**, también se representa con una cifra que se ubica a la izquierda de las decenas. Así sucesivamente.

Por eso se dice que es un sistema **posicional de base 10.**




**Resolviendo:** (Problema introductorio)

**Millares:** Representa grupos de 1000 (4° orden)
**Centenas:** Representa grupos de 100 (3° orden)
**Decenas:** Representa grupos de 10 (2° orden)
**Unidades:** Representa unidades (1° orden)

| M | C | D | U |
|---|---|---|---|
| 8 | 7 | 5 | 9 |

= 8 000 + 700 + 50 + 9

| unidades | decenas | centenas | millares |
|---|---|---|---|
| 9 | | | |
| 50 | 5 | | |
| 700 | 70 | 7 | |
| 8 000 | 800 | 80 | 8 |
| Total: | 875 | 87 | 8 |

Por cada decena una bolsa, por cada centena una caja mediana y por cada millar una caja grande.

∴ Se necesitan 875 bolsas, 87 cajas medianas y 8 cajas grandes.

**Ten en cuenta**

**Cifras del sistema decimal**

En el sistema decimal, con las cifras:

0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9

se escriben todos los números, por más grandes o pequeños que sean.

Las cifras del 1 al 9 se denominan **cifras significativas**, donde 9 es la máxima cifra de la base 10.

## Lectura y escritura de los números en el sistema decimal

El número natural es una propiedad de los conjuntos equivalentes, es una abstracción, por lo que necesita una representación. La representación escrita de un número se llama numeral, aunque usualmente llamamos número. Por ejemplo, 24 es un numeral que en base 10 representa el número veinticuatro, pero el mismo número en otra base tiene otra representación.

La virtud del sistema posicional de base 10 radica en el valor que adquiere una cifra por su ubicación en el numeral según la siguiente tabla.

| Millares de millones | | | Millones | | | Millares | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Centena de millar de millón | Decena de millar de millón | Unidad de millar de millón | Centena de millón (CMi) | Decena de millón (DMi) | Unidad de millón (UMi) | Centena de millar (CM) | Decena de millar (DM) | Unidad de millar (UM) | Centenas (C) | Decenas (D) | Unidades (U) |

**Leamos algunos números:**

- **4 586:** Cuatro mil quinientos ochenta y seis.
- **75 214 586:** Setenta y cinco millones doscientos catorce mil quinientos ochenta y seis.
- **215 896 421 941:** Doscientos quince mil ochocientos noventa y seis millones cuatrocientos veintiún mil novecientos cuarenta y uno.
- **346 782 341 564 974:** Trescientos cuarenta y seis billones setecientos ochenta y dos mil trescientos cuarenta y uno millones quinientos sesenta y cuatro mil novecientos setenta y cuatro.
- **43 581 654 289:** _____
- **945 831 681 527:** _____

**Ten en cuenta**

**Lectura de decenas**

**Menores que 30**

Se junta las decenas con las unidades en una sola palabra:

18: "Dieciocho"

23: "Veintitrés"

29: "Veintinueve"

**Mayores que 30**

Se junta las decenas con las unidades mediante "y":

38: "Treinta y ocho"

45: "Cuarenta y cinco"

97: "Noventa y siete"

Resuelve problemas de cantidad (Aritmética)

## Valor absoluto y valor relativo de una cifra

| M | C | D | U | |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 2 | 5 | 7 | ← Aquí 7 representa 7 unidades |
| 8 | 2 | 7 | 5 | ← Aquí 7 representa 70 (7 decenas) |
| 8 | 7 | 2 | 5 | ← Aquí 7 representa 700 (7 centenas) |
| 7 | 8 | 2 | 5 | ← Aquí 7 representa 7000 (7 millares) |

El valor absoluto de 7 es siete, en cambio, su valor relativo depende de su ubicación en el numeral.

*Ejemplo 1*

**Completa** la tabla con el valor absoluto y el valor relativo de la cifra en rojo.

| Número | 682 589 | 60 795 | 3 321 014 | 2 141 916 | 414 567 | 862 387 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Valor absoluto | | | | | | |
| Valor relativo | | | | | | |

## Descomposición de un número

Todo numeral se puede expresar como la suma de los valores relativos de todas sus cifras.

- 372 = 300 + 70 + 2
- 6 926 = 6000 + 900 + 20 + 6 ← *Forma aditiva*

  $6\,926 = 6\times10^3 + 9\times10^2 + 2\times10^1 + 6$ ← *Forma polinómica*
- 9 547 = _____

  9 547 = _____
- 41 725 = _____

  41 725 = _____
- 237 003 = _____

  237 003 = _____

**Ten en cuenta**

**Formas de representación**

**Número: 7 856**

- **Por el valor posicional**
  7M + 8C + 5D + 6U
- **Forma aditiva**
  7000 + 800 + 50 + 6
- **Forma polinómica**
  $7\times10^3 + 8\times10^2 + 5\times10 + 6$

**Notación literal**

Sean $a = 3$ y $b = 5$

- $ab = 3\times5 = 15$
- $\overline{ab} = 35$
- $\overline{bab} = 535$
- $\overline{aabb} = 3355$

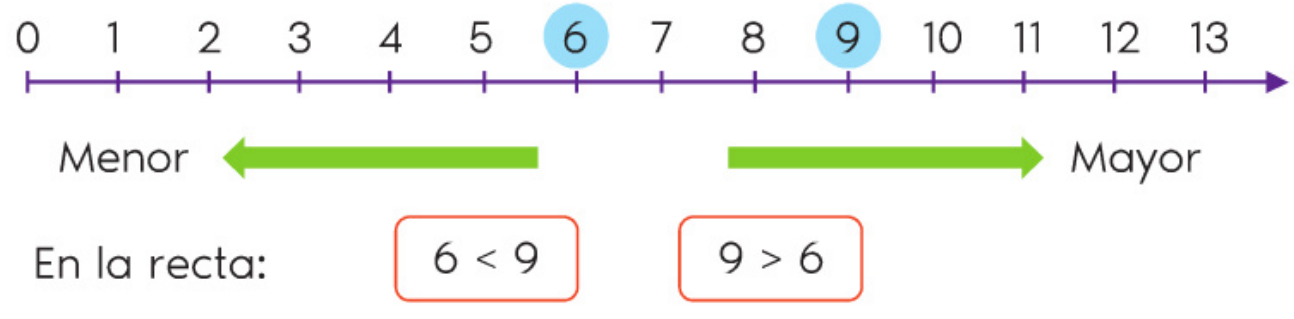
## Relación de orden en los números naturales

El conjunto de los números naturales es un conjunto ordenado.

Dados dos números naturales *a* y *b*, solo caben tres posibilidades:

| $a > b$ | $a = b$ | $a < b$ |
|---|---|---|
| *a* mayor que *b* | *a* igual a *b* | *a* menor que *b* |

Este hecho nos permite representar los números naturales en la recta numérica.




De dos números ubicados en la recta numérica, es mayor el que está a la derecha y menor el que está a la izquierda.

**Ten en cuenta**

**Signos de la desigualdad**

Estos son los signos de la desigualdad:

< : menor que

> : mayor que

≤ : menor o igual que

≥ : mayor o igual que

Los signos de desigualdad se pueden leer de izquierda a derecha y de derecha a izquierda.

## Comparación de números naturales

Para comparar dos números de varias cifras, vamos comparando cifra por cifra desde las cifras de mayor orden hasta encontrar cifras diferentes.

724 689 } Como 6 < 7 ⇒ 724 689 < 724 741 ó
724 741 } Como 7 > 6 ⇒ 724 741 > 724 689

### *Ejemplo 2*

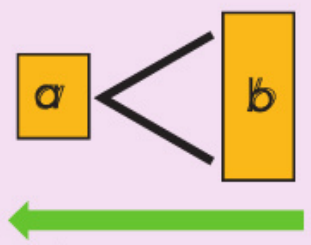
En los casilleros **coloca** el signo de desigualdad que corresponde:

975 ☐ 923 32 427 ☐ 32 827

36 569 ☐ 36 612 325 691 ☐ 320 627

**Ten en cuenta**

*a* menor que *b*

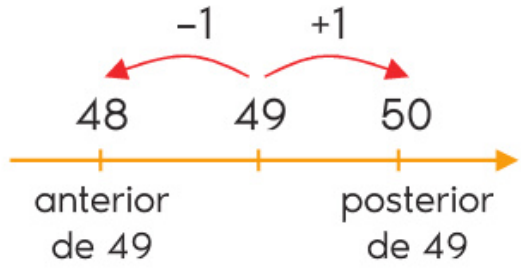



*b* mayor que *a*

En el lado abierto del signo va el número mayor y en lado agudo, el menor.

## Anterior y posterior

Dado un número natural en la recta numérica, el anterior es el que está inmediatamente a la izquierda y el posterior, el que está inmediatamente a la derecha del número.






### Nivel básico

**1** **Escribe** los siguientes números:

a) Veintidós mil ochocientos noventa y tres.

b) Trescientos cincuenta mil novecientos setenta y dos.

c) Ciento veinticinco mil millones novecientos ochenta y tres mil setecientos tres.

**2** **Expresa** los siguientes números en su forma aditiva.

a) 4 927 b) 27 290 c) 240 028

**3** Con todas las cifras 2; 0; 7; 1; 9 y 6 **forma** cinco números diferentes y **ordénalos** de menor a mayor.

**4** **Ordena** en forma ascendente los siguientes números:

A = 7 000 + 800 + 50 + 9

B = 2000 + 200 + 3

C = 60 000 + 2 000 + 900 + 40



Genio Matic

**5** **Escribe** el anterior y el posterior de cada número:

| anterior | número | posterior |
|---|---|---|
| | 200 | |
| | 3 000 | |
| | 4 200 | |
| | 5 099 | |

## Nivel intermedio

**6** ¿Cuál es el mayor y el menor número, cuyas cifras son 5; 8; 1 y 3?

**7** El anterior de 31 899 es A y el posterior de 31 988 es B. **Determina** el anterior y el posterior de A + B.

**8** Fernando nació antes del año 2000. Si el valor relativo de una de las cifras de su año de nacimiento es 1000, dos de las cifras suman 17, la cifra de unidades es 7 unidades menor que la de decenas y es un año impar, ¿en qué año nació Fernando?

**9** ¿Cuál es la cifra que difiere en 5 994 de su valor relativo?

**10** **Encuentra** un número con las siguientes pistas:

- Tiene 4 cifras diferentes y termina en 3.
- Dos de sus cifras suman 12.
- El valor relativo de una de sus cifras es 9000.
- Es el mayor posible.

## Nivel avanzado

**11** **Encuentra** el mayor número de 4 cifras diferentes cuya cifra de mayor orden tiene un valor relativo de 6 000.

**12** El año anterior y el año posterior del año de nacimiento de Joaquín suman 4018. ¿En qué año nació Joaquín?

**13** ¿Cuál es el número posterior del menor número cuya suma de cifras es 38?

**14** ¿Cuál es el mayor número de 3 cifras diferentes tal que al invertir el orden de sus cifras aumenta en 396?



## Tarea

**1** Descompón polinómicamente los siguientes números.

a) 4 639 b) 21 070 c) 72 030

**2** ¿Cuál es el menor número de 4 cifras cuyo producto de sus cifras es 6?

**3** ¿Cuál es la diferencia entre el mayor número de 5 cifras y el menor número de 5 cifras diferentes?

**4** El número de soles que posee Jorge tiene 2 cifras diferentes. Cuando se intercambia el orden de las cifras, el valor relativo de una de las cifras aumenta en 36 y el de la otradisminuye en 54. ¿Cuánto tiene Jorge?

# Numeración no decimal

Descomposición polinómica

En la fábrica de dulces de don Luciano, los bombones se empacan en cajitas de 8 unidades, y están en cajas chicas de 8 cajitas.

Un día se produjo 250 bombones.

VIDEO DE TEORÍA

**Responde:**

¿Cuántas cajitas y cajas chicas se necesitan para empaquetar los 250 bombones?

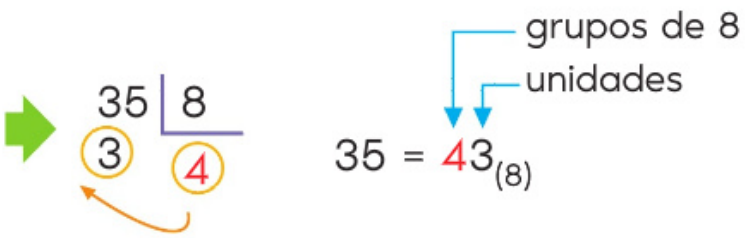
## ¿Cómo se forman los números en bases distintas de 10?

En cualquier base, los números se forman por agrupación. Por ejemplo, en base 8, con 8 unidades se forma una unidad de segundo orden, con 8 unidades de segundo orden se forma una unidad de tercer orden, y así sucesivamente. Véase el siguiente ejemplo:

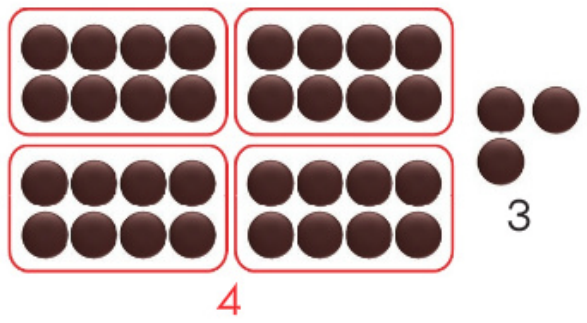
Aquí tenemos 35 bombones:

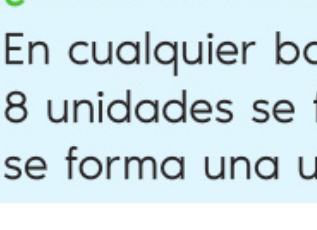
Vamos a contarlos en base 8, agrupando de 8 en 8.

Para saber cuántos grupos de 8 se forman dividimos entre 8.

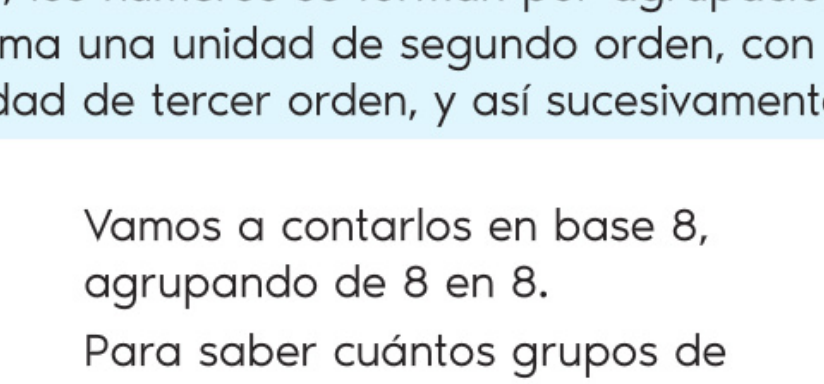


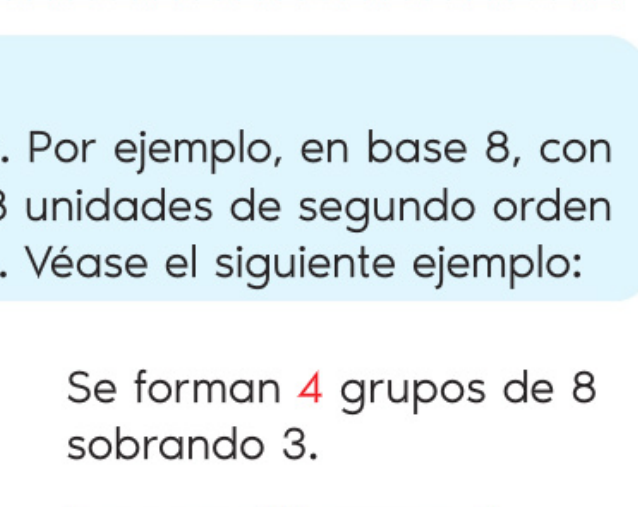

Se forman 4 grupos de 8 sobrando 3.




Ahora contemos en base 3, agrupando sucesivamente en grupos de 3.



$1022_{(3)} = 1\times3^3 + 2\times3 + 2$

$1022_{(3)} = 27 + 6 + 2 = 35$

El número treinta y cinco en base 10 se escribe como 35; en base 8, como $43_{(8)}$ y en base 3, como $1022_{(3)}$.

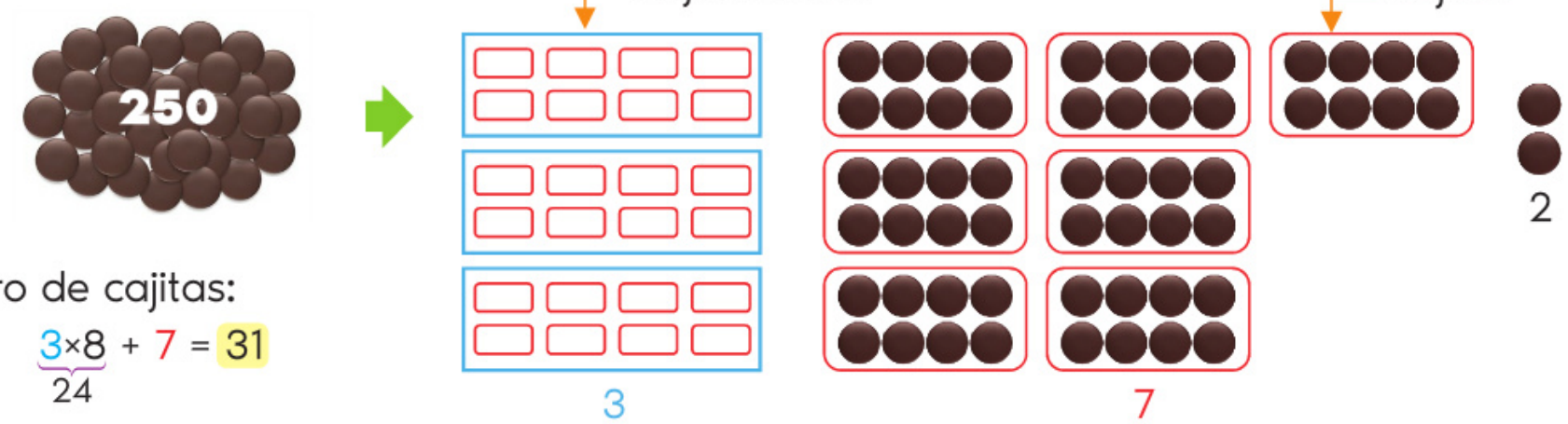
Resuelve problemas de cantidad (Aritmética)

**Resolviendo:** (Problema introductorio)

Los 250 bombones se van agrupando de 8 en 8. Para saber la cantidad de grupos que se forma bastará escribir 250 en base 8.

250 | 8
2 | 31 | 8
7 | 3

$\Rightarrow 250 = 372_{(8)}$




- Número de cajitas:

$\underbrace{3\times8}_{24} + 7 = 31$

- Número de cajas chicas: 3

## Valor relativo de las cifras en bases distintas de 10

En 372, la cifra 3 representa a 300 o $3\times10^2$ y la cifra 7 representa 70 o $7\times10$.

Pero en $372_{(8)}$, la cifra 3 representa $3\times8^2$ y la cifra 7 representa $7\times8$; véase arriba.

Representa $3\times8^2 = 3\times64 = 192 \Rightarrow$ valor relativo de 3 es 192.
Representa $7\times8 = 56 \Rightarrow$ valor relativo de 7 es 56.
$372_{(8)}$

***Ejemplo 1***

**Completa** la tabla con el valor relativo de la cifra en rojo.

| Número | $547_{(8)}$ | $43\,231_{(5)}$ | $22\,002_{(3)}$ | $41\,220_{(6)}$ | $5647_{(9)}$ | $42\,356_{(7)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Valor relativo | | | | | | |

## Descomposición polinómica

Es la expresión de un numeral como la adición de los valores relativos de sus cifras.

- $2\,547_{(8)} = 2\times8^3 + 5\times8^2 + 4\times8 + 7$
- $3\,106_{(9)} = 3\times9^3 + 1\times9^2 + 6$
- $52\,004_{(7)} = 5\times7^4 + 2\times7^3 + 4$
- $32\,102_{(4)} = 3\times4^4 + 2\times4^3 + 1\times4^2 + 2$

***Ejemplo 2***

**Descompón** polinómicamente los siguientes numerales:

a) $143_{(5)}$ = _____

b) $5\,315_{(7)}$ = _____

c) $24\,702_{(9)}$ = _____

d) $101\,101_{(2)}$ = _____

**Ten en cuenta**

**Base de un sistema de numeración**

La base de un sistema de numeración debe ser un número natural mayor que uno, porque no tendría sentido agrupar de uno en uno.





GENIO MATIC

*Ejemplo 3*

¿Por qué no se puede utilizar la cifra 7 en la base 5?

## Principales sistemas de numeración

| Base | Nombre | Cifras |
|---|---|---|
| 2 | Binario | 0; 1 |
| 3 | Ternario | 0; 1; 2 |
| 4 | Cuaternario | 0; 1; 2; 3 |
| 5 | Quinario | 0; 1; 2; 3; 4 |
| 6 | Senario | 0; 1; 2; 3; 4; 5 |
| 7 | Heptanario | 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 |
| 8 | Octanario | 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 |
| 9 | Nonario | 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 |
| 10 | Decimal | 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 |
| 11 | Undecimal | 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; $\alpha$ |
| 12 | Duodecimal | 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; $\alpha$; $\beta$ |

*Ejemplo 4*

**Escribe** los números naturales desde 1 hasta 12 en:

a) Base 2: _____

b) Base 3: _____

*Ejemplo 5*

**Escribe** los números naturales desde 1 hasta 20 en:

a) Base 6: _____

b) Base 9: _____

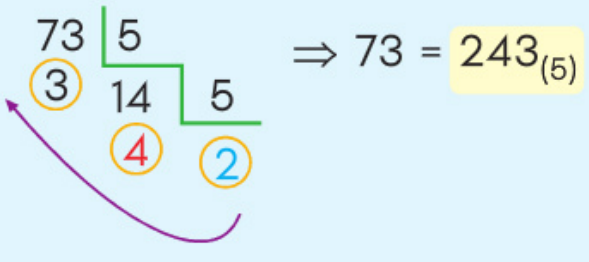
## Cambios de base

Como se puede observar en los ejemplos, un mismo número se puede escribir en diferentes bases. En esta parte se trata de escribir un número de la base 10 en una base distinta y, recíprocamente, un número escrito en cualquier base pasarlo a la base 10.

### De base 10 a una base distinta

Para escribir un número en cualquier base bastará ir agrupando sucesivamente según la base en la que se quiere escribir, esto es, ir dividiendo sucesivamente.

Escribamos 73 en base 5:



### De base distinta de 10 a base 10

Cualquier número es igual a la suma de los valores relativos de sus cifras. En consecuencia, para escribir un número de cualquier base en la base diez, bastará sumar los valores relativos de sus cifras.

Escribamos $2143_{(5)}$ en base 10: $2143_{(5)} = \underbrace{2\times5^3}_{250} + \underbrace{1\times5^2}_{25} + \underbrace{4\times5}_{20} + 3 = 298$ (125)

### *Ejemplo 6*

**Escribe** el número 30 en las bases que se indican:

| Número | Base 7 | Base 6 | Base 5 | Base 4 | Base 3 | Base 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | | | | | | |

### *Ejemplo 7*

**Escribe** en base 10 los números de la tabla.

| Número | $159_{(12)}$ | $475_{(9)}$ | $523_{(6)}$ | $21\,342_{(5)}$ | $102\,120_{(3)}$ | $11\,010\,110_{(2)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Base 10 | | | | | | |

Resuelve problemas de cantidad (Aritmética)

## Nivel básico

**1** ¿Cuál es el mayor número de 3 cifras consecutivas de la base 7?

**2** ¿Cómo se escribe en base 10 el consecutivo de $45_{(8)}$?

**3** **Relaciona** mediante una flecha los números de la primera columna con su equivalente de la segunda columna:

| | |
|---|---|
| $1021_{(3)}$ | $325_{(6)}$ |
| $255_{(6)}$ | 34 |
| 165 | $203_{(9)}$ |
| 125 | 107 |

**4** **Escribe** en base 10 el sucesor de $344_{(5)}$.

**5** ¿Cuántos números hay entre $332_{(4)}$ y $87_{(9)}$?

## Nivel intermedio

**6** **Escribe** en base 8 el mayor número de 3 cifras diferentes del sistema decimal.



Genio Matic

**7** Si los números $\overline{2a2}_{(7)}$ y $205_{(a)}$ están correctamente escritos, escriba $\overline{aaa}$ en base 7.

**8** ¿En cuánto aumenta $135_{(6)}$ cuando se invierte el orden de sus cifras?

**9** **Escribe** en el sistema decimal el mayor número de 3 cifras consecutivas de la base 7.

## Nivel avanzado

**10** Si los números $656_{(a)}$ y $\overline{6b0}_{(a)}$ son consecutivos, ¿cómo se escribe $\overline{aba}_{(8)}$ en base 9?

**11** Si los números $\overline{3b5}_{(a)}$, $\overline{3a4}_{(7)}$ y $403_{(b)}$ están correctamente escritos, encuentra el menor número con cifras $a$ y $b$ que se puede formar. **Escríbelo** en base 10.

**12** ¿Cuál es el número de 2 cifras de la base 7 que para escribirlo en base 9 basta con invertir el orden de sus cifras?

## Tarea

**1** ¿Cuántos elementos del conjunto A son iguales? $A = \{201_{(3)}; 311_{(4)}; 103_{(4)}; 10011_{(2)}\}$

**2** **Escribe** el posterior de $244_{(5)}$ en base 10.

**3** **Escribe** en base 6 el mayor número de 3 cifras diferentes de la base 4.

**4** ¿En cuánto varía $243_{(7)}$ si se permutan sus cifras extremas?

# Adición

Adición y sustracción de números hasta 10 000

El ingeniero Torres está a cargo de tres obras valorizadas en S/. 745 894; S/. 281 806 y S/. 1 267 930.

Ya recibió una partida de S/. 1 800 000 y ha solicitado el resto del presupuesto para completar la obra.

VIDEO DE TEORÍA

**Responde:**

¿Cuánto dinero ha solicitado? _____

**La adición** es la operación aritmética más importante. Consiste en: dados dos números llamados sumandos, hacer corresponder un número llamado suma, el cual se compone de ambos sumandos.

**Resolviendo:** (Problema introductorio)

| | | |
|---|---|---|
| Obra 1: | 745 894 | + |
| Obra 2: | 281 806 | |
| Obra 3: | 1 267 930 | |
| Presupuesto total: | 2 295 630 | – |
| A cuenta: | 1 800 000 | |
| Saldo: | 495 630 | |

∴ Ha solicitado el saldo de S/. 495 630

## Propiedades de la adición

### Ley de clausura

La suma de dos números naturales siempre es otro número natural.

### Elemento neutro de la adición

Cero es el elemento neutro de la adición porque cualquier número sumado con cero resulta el mismo número.

### Propiedad conmutativa

Carlos vierte en un reservorio 35 litros de agua y luego 20 litros, en cambio Donato vierte primero 20 litros en otro reservorio y luego 35 litros. ¿Cuántos litros han vertido cada uno?

Carlos: 35 + 20 = 55
Donato: 20 + 35 = 55
} 35 + 20 = 20 + 35

Invirtiendo los sumandos se obtiene la misma suma.

**Ten en cuenta**

**Adición en bases distintas de 10**

Sumemos $762_{(8)} + 654_{(8)}$:

$$\overset{1}{762}_{(8)} + 654_{(8)} = 1636_{(8)}$$

3°: 2° 1°

1°: 2 + 4 = 6 < 8
⇒ se pone

2°: 6 + 5 = 11 = 8 + 3
se lleva 1
se pone

3°: 7 + 6 + 1 = 14 = 8 + 6
se lleva 1
se pone

Resuelve problemas de cantidad (Aritmética)

### Propiedad asociativa

A Darío y a Milla le dieron la siguiente adición:

101 + 786 + 899

Darío sumó así:

786 + 101 + 899

887

1786

Milla sumó así:

786 + 101 + 899

1000

1786

¿Cuál de las formas es mejor?

## Serie aritmética

Se denomina **sucesión aritmética** a un conjunto de números donde dado el primero, cada uno de los siguientes se obtiene sumando al anterior el mismo número, llamado **razón.**

7; 10; 13; 16; .... ; 88 es una sucesión aritmética de razón 3.

Cuando los términos de la sucesión aritmética los expresamos en forma de una adición, tenemos una serie aritmética.

7 + 10 + 13 + 16 + .... + 88 es una serie aritmética.

## Suma de la serie aritmética

Durante el mes de agosto, Sara ahorró 5 soles el primer día y cada día siguiente, 3 soles más que el día anterior. ¿Cuánto ahorró todo el mes?

**Resolviendo:**

Día: 1° 2° 3° 4° ... 29° 30° 31°

Ahorró: 5 + 8 + 11 + 14 + ... + 89 + 92 + 95

+3 +3 +3 +3 +3

100

100

100

∴ Ahorró = $(95 + 5)\times\frac{31}{2} = 100\times15{,}5 = 1550$

Desde el segundo día, el ahorro aumenta diariamente en 3. El ahorro del último día ha aumentado en 30×3 = 90, por eso es 5 + 90 = 95.

Se observa que cada pareja de términos equidistantes suma 100. Con 31 números se hacen 15,5 parejas, entonces la suma es 15,5×100 = 1550.

**Generalizando:**

Suma de la serie aritmética:

$$\underset{r\ \ r\ \ r}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4} + \ldots + a_n = \frac{n(a_n + a_1)}{2}$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Caso particular:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

### *Ejemplo 1*

Desde muy temprano, Elio se puso a contar los carros que pasaban por su puerta. Cada 10 minutos anota los carros que pasan en ese tiempo. En sus apuntes figura 3; 7; 11; 15; ...; 67. ¿Cuántos carros contó?

**Resolviendo:**

Supongamos que anotó *n* veces:

$$S = \overbrace{3 + 7 + 11 + 15 + \ldots + 67}^{n}$$

+4 +4 +4

$3 + (n - 1)\times4 = 67$

$(n - 1)\times4 = 64$

$n - 1 = 16 \Rightarrow n = 17$

Aplicamos la fórmula de la suma: $S = \frac{n(a_n + a_1)}{2}$

$$S = \frac{17(67 + 3)}{2} = \frac{17(\overset{35}{\cancel{70}})}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 595$$

∴ Contó 595 carros.

Resuelve problemas de cantidad (Aritmética)

***Ejemplo 2:*** **Calcula** la suma de las series:

a) 7 + 11 + 15 + 19 + ... (15 #s) = ☐

b) 2 + 7 + 12 + 17 + ... + 47 = ☐

c) 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 20 = ☐

d) 13 + 14 + 15 + ... + 50 = ☐

## Nivel básico

**1** El Ing. Castro tiene tres obras, cuyos gastos de planilla son:

- Obra 1: Puente Yanamayo S/. 36 785
- Obra 2: Edificio Castro S/. 52 327
- Obra 3: Losa deportiva S/. 13 568

¿A cuánto asciende el gasto total de planilla?

**2** El profesor de educación física hace correr a sus alumnos y los premia con caramelos, según el orden de llegada: al primero le da 50 y a cada uno de los siguientes, 3 menos que al anterior.

a) Si al último le dio 2, ¿cuántos alumnos tiene?

b) ¿Cuántos caramelos repartió?

**3** En el problema anterior:

a) Si tuviera 12 alumnos, ¿cuántos caramelos le tocaría al último?

b) ¿Cuántos caramelos repartiría?

**4** En el planeta Nonal se utiliza como máxima cifra al 8. Si Krimpi compró una bicicleta en 624 y una patineta en 57, ¿cuánto gastó en total?

**5** Si al sumar 45 con 34 se obtiene 112, ¿cuánto se obtiene al sumar 54 con 43?

## Nivel intermedio

**6** Eduardo ha comprado un auto en 25 695 soles. Luego de hacer algunos arreglos y reparaciones con 2 583 soles lo vende en 30 mil soles. ¿Cuánto gana?





Genio Matic

**7** ¿Para qué valor de x e y la suma $\overline{24x6}_{(7)} + \overline{4y45}_{(7)}$ es máxima pero no mayor de $6654_{(7)}$?

**8** En un país donde utilizan el sistema nonario, un niño gasta $345_{(9)}$ en un pantalón y $257_{(9)}$ en una camisa. ¿Cuánto gasta en total en su propio sistema?

**9** Araceli juega con un polígono poniendo las cuentas, 1; 2; 3; .... en los lados. Si el polígono tiene 20 lados, ¿cuántas cuentas usa Araceli?

## Nivel avanzado

**10** Artemio estuvo de paseo durante quince días. El primer día gastó 36 soles y cada día siguiente 5 soles más que el día anterior. ¿Cuánto gastó en los 15 días?

**11** Con dos cifras del sistema octal, que suman 13, se forman todos los números de dos cifras diferentes. ¿Cuánto suman los números en dicha base?

**12** La siguiente adición tiene 20 paréntesis. ¿Cuál es la suma?

$$(1 + 2) + (2 + 3) + (3 + 4) + ...$$

## Tarea

**1** El Ing. Celis tiene dos obras cuyos gastos de planilla son:

- Obra 1: Puente Azul S/. 24 597
- Obra 2: Carretera Salcay S/. 35 214

Si dispone de 47 279, ¿cuánto le falta para cubrir toda la planilla?

**2** Domingo necesita 136 soles para comprar una pelota y su hermano Celso necesita 184 para comprar una pelota y dos viseras. Si el papá les da 500 soles para los dos, ¿cuánto les queda luego de hacer la compra?

**3** En el país de Heptaña sólo se emplea 7 cifras. Si un día gano 64 en este país, al otro día, 53 y al tercer día, 56, ¿cuánto gano en total?

**4** **Halla** la suma de la fila 20 del siguientes arreglo:

Fila 1: 1

Fila 2: 2 + 3

Fila 3: 3 + 4 + 5

Fila 4: 4 + 5 + 6 + 7

.....

# Reforzando - Unidad 1

**1** Sean los números:

a = Dos mil trescientos cuarenta y nueve

b = Seis mil ciento cinco

c = Tres mil doscientos cincuenta y nueve

d = Cinco mil cuatrocientos noventa y tres

El número que no se menciona es:

A) 3259 C) 6105 D) 2349
B) 5493 E) 6015

**2** Valentina ha escrito los siguientes numerales:

$a = 24_{(5)}$ $b = 21_{(8)}$ $c = 31_{(4)}$

Si ordenamos de menor a mayor, ¿cuál sería el orden final?

A) abc B) acb C) bac
D) bca E) cab

**3** Estefany ha encontrado una propiedad del número treinta y uno. En base 7 se escribe como 43 y cuando invierte el orden de las cifras de este numeral queda escrito en otra base. ¿Cuál es esta otra base?

A) 4 B) 5 C) 7
D) 8 E) 9

**4** Con los dígitos 1; 2: 4: 5 y 6, ¿cuántos números de dos cifras distintas se puede formar en el sistema quinario?

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 8

**5** ¿Cómo se escribe en base 5 el número anterior a $34_{(8)}$?

A) $121_{(5)}$ B) $111_{(5)}$ C) $120_{(5)}$
D) $102_{(5)}$ E) $103_{(5)}$

**6** Eduardo escribió todos los números de dos cifras del sistema cuaternario. ¿Cuántos números escribió?

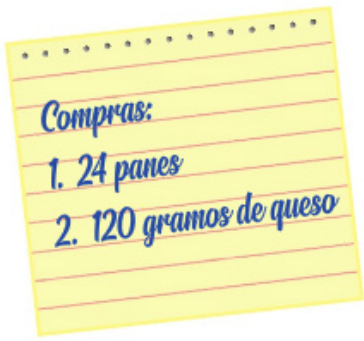
A) 99 B) 44 C) 36
D) 12 E) 16

## Olimpiadas nacionales e internacionales

**7** A Elisa le mandaron a escribir los números de 2 cifras pero en el sistema heptal. Cuando llegó al número 56, no supo qué número seguía. ¿Cuál es el número que sigue?

A) 57 B) 61 C) 60
D) 70 E) 51

**8** Marco entregó en la tienda la siguiente lista:




Si le dieron 16 panes, ¿cuántos gramos de queso recibió?

A) 50 gramos B) 48 gramos
C) 60 gramos D) 72 gramos

**9** Encuentra la diferencia entre el mayor número de tres cifras que se puede formar con las tres tarjetas y el menor número que se puede formar con las mismas tarjetas.

A) 795 B) 495
C) 791 D) 486

**10** Una fábrica vende sus productos en unidades, cajas de 10, cajas de 100 y cajas de 1000 unidades. Las cajas de 10 unidades se llaman cajas U; las de 10, cajas D; las de 100, cajas C y las de 1000, cajas M. El almacenero reportó a fin de semana la venta de 7 cajas M, 4 cajas C, 12 cajas D y 13 unidades. ¿Cuántas unidades vendieron esa semana?

A) 7425 B) 7523 C) 7525
D) 7533 E) 7425

**11** Si las cifras del número 235 se invierten, entonces el número:

I. Aumenta en 297 III. No varía
II. Disminuyen en 297

A) Solo I B) Solo II
C) Solo III D) I y II

**12** Santiago escribe un número escribiendo desde 1 los números de la base 8, hasta que el cero aparezca como la cifra central. ¿Cuál es la última cifra escrita del número?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

**13** A Andrea le pidieron que escriba el mayor número de 3 cifras que sumen 19 y escribió 982. ¿Es correcta su respuesta? Si no es correcta, ¿en cuántas unidades se equivocó?

A) 0 B) 12 C) 6
D) 8 E) 9

**14** ¿Cuántos números de 3 cifras existen tal que al expresarlos en el sistema octal sus cifras de menor orden son 3 y 1?

A) 14 B) 16 C) 20
D) 24 E) 32

**15** El profesor de matemáticas les pidió a Mario, Tito, Sonia y Raquel que escribieran un número de dos cifras en el sistema de su preferencia, por lo que escribieron $34_{(8)}$; $50_{(6)}$; $43_{(7)}$ y $44_{(5)}$, respectivamente.

El profesor pidió que salgan a escribir en la pizarra en orden descendente. ¿Quién salió primero?

A) Mario B) Tito
C) Sonia D) Raquel

**16** Un joven, al ser consultado por su edad, respondió: "Si mi edad es restada de 26, se obtiene la suma de sus cifras". ¿Cuál es la suma de las cifras de la edad del joven?

A) 6 B) 7 C) 4
D) 5 E) 3

**17** Con los dígitos 1, 2, 3, 4 se forman números de tres cifras. ¿Cuántos números diferentes pueden formarse sin repetir las cifras?

A) 60 B) 24 C) 20
D) 12 E) 6

**18** ¿Cuántos números naturales entre 100 y 200 tienen la suma de sus dígitos igual a 6?

$100 \ldots 200$

A) 3 B) 5 C) 6
D) 8 E) 10

**19** Con los dígitos 2; 4; 5; 6 se forman números impares de tres cifras. ¿Cuántos números diferentes pueden formarse sin repetir las cifras?

A) 60 B) 24 C) 20
D) 12 E) 6

**20** Luciano estuvo de paseo durante doce días. El primer día gastó 30 soles y cada día siguiente 6 soles más que el día anterior. ¿Cuánto gastó en los 12 días?

A) S/. 468 B) S/. 456 C) S/. 726
D) S/. 498 E) S/. 756

**21** Encuentre la cantidad de números, del 1 al 100, que se pueden obtener como la suma de 9 números consecutivos.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

**22** Determina el valor de "$a$" si:

$$\overline{13(a-1)}_a = \overline{(a+1)(a/2)}_8$$

A) 1 B) 2
C) 6 D) 3

**23** Si $\overline{ab4c} = \overline{d\left(\frac{c}{3}\right)}^2$; $a > b$; halla $a + b + c + d$.

A)30 B) 32 C)19
D)29 E) 15

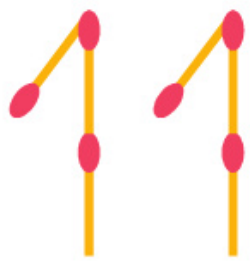
**24** Si $\overline{\left(\frac{9}{m}\right)\left(\frac{6}{m}\right)\left(\frac{12}{m}\right)}_{(2m-1)} = \overline{abcd}_{(x)}$,

calcula $a + b + c + d + m + x$.

A) 8 B) 10 C) 12
D) 13 E) 15

**25** Tatiana está pensando un número comprendido entre 6000 y 7000, que termina en 45 y cuya suma de sus cifras es 15. ¿Cuál es el número que está pensando Tatiana?

**26** Este once confeccionado con fósforos, puede con facilidad transformarse en mil moviendo solo uno de ellos. ¿De qué forma se hace?



**27** El número 401 es un número de tres dígitos y la suma de sus dígitos es 4 + 0 + 1 = 5.

¿Cuántos números de tres dígitos, incluyendo el número 104, tienen la propiedad de que la suma de sus dígitos es 5?

**28** Es un número impar de 4 cifras. Si empezando por la cifra de las unidades, cada cifra es la mitad de la inmediatamente superior, ¿cuál es el número?

**29** En una prisión de máxima seguridad hay un preso en cada celda. Cuando se reportan, empezando de la celda extrema, cada uno canta !Uno¡ ¡Dos! ¡Tres! ... así sucesivamente hasta que la suma de los números cantados sea 45, luego el siguiente preso inicia nuevamente desde uno. Si la secuencia se repite exactamente 10 veces, ¿cuántos presos hay en la prisión?

**30** Una clave consiste en un número de 6 dígitos. Descúbrelo con los siguientes datos:

- La cifra de centenas es igual que la de decenas.
- Contiene 3 cifras 8 y ninguna está junta a la otra.
- Ninguna cifra es menor que 7.
- Contiene una sola cifra 9.

**31** Nadie podía creer que Sandrito, un niño de 5 años podía contar hasta 50. Pero su tío Ruperto se dio cuenta de que no contaba los números que contenían la cifra 3 porque no podía pronunciarla y le daba vergüenza mencionarla. ¿Cuántos números dejaba de contar Sandrito?

**32** Carlos y Josefa empiezan a caminar juntos contando sus pasos. Carlos lo hace en la forma habitual, en cambio Josefa lo hace en el sistema nonario. Ambos se detienen luego de haber dado igual número de pasos. Si Josefa llegó al penúltimo número de dos cifras del sistema que usó, ¿cuántos pasos dio cada uno?

**33** Percy y su perrito Kukín suelen correr por las mañanas alrededor del parque del barrio. Ambos parten del mismo punto pero en sentidos contrarios. Como Kukín es doble de rápido que Percy, cuando se encuentran por primera vez Kukín ya había recorrido 240 metros. Se cruzan y continúan corriendo manteniendo cada uno su rapidez. Cuando Kukín haya llegado al punto de partida, ¿cuántos metros le faltarán a Percy para lo mismo?

**34** Artemio es zurdo y tiene la costumbre de escribir los números de derecha a izquierda. Por ejemplo, si le dictan 358, escribe 853. Un día la profesora le dictó para que sume los números 654 y 279. Si lo efectuó como es su costumbre, ¿en cuánto difiere su resultado del resultado correcto?

**35** Este plano muestra dos calles que se cruzan. El área de cruce (en gris) es un cuadrado de 10 metros de lado.

El rectángulo superior derecho tiene un perímetro de 200 m y el perímetro del rectángulo inferior izquierdo es 320 metros. Si la región que abarca el plano es un cuadrado, ¿cuánto mide su lado?

# Autoevaluación

**1** Marcelo debía escribir el número cuarenta y cinco en base 6 y lo escribió $45_{(6)}$. Es evidente que este número es veintinueve y no 45. ¿Cómo debió escribir correctamente?

**2** Un concurso consiste en escribir numerales de dos cifras en sistemas distintos del decimal. Si Anselmo escribió en el sistema quinario y Doroteo, en el sistema senario, ¿cuántos números fueron escritos tanto por Anselmo como por Doroteo?

**3** Pedrito debe formar todos los números de cinco cifras que se puedan escribir con los dígitos 0 y 1. ¿Cuáles números formó Pedrito y cuántos son?

**4** El otro día hice una lista de todos los números de 6 cifras que contienen exactamente 5 nueves. ¿Cuántos números tenía mi lista?

**5** En un país donde se utiliza un sistema distinto del decimal, un niño de sexto grado realizó la siguiente operación:

$$15 + 34 = 53$$

Si la operación está correctamente efectuada, ¿qué sistema usan en este país?

**6** A Rolando le ofrecieron 2 opciones de pago diario por una semana de trabajo:

**Opción 1:** Pagarle diariamente 22 soles.

**Opción 2:** Pagarle 6 soles por el primer día, y en los 6 días siguientes 6 soles más que el día anterior.

¿Cuál de las opciones eligió?

2

# 4 Operaciones fundamentales

La adición, la sustracción, la multiplicación y la división son las operaciones con las que se realiza cualquier tipo de cálculo. Con estas operaciones se resuelven los problemas matemáticos.

Enfoque Búsqueda de la excelencia

## Nos organizamos en equipos para trabajar y lograr mejores resultados.

Mientras más personas estén comprometidas en la realización de un trabajo, los resultados son mucho mejores. Cada integrante aporta con algo y a la hora de ejecutar un proyecto se dispone de más ideas, de habilidades diversas y mayor confianza y seguridad en las acciones, porque si alguien falla están los otros para suplir o compensar. El en trabajo en equipo se complementan los esfuerzos, lo que alguien no puede hacer, siempre hay uno del equipo que sí.

| Resuelve problemas de cantidad (Aritmética) | |
|---|---|
| **Capacidades** | **Desempeños** |
| **Traduce cantidades a expresiones numéricas** | Traduce problemas expresados en enunciados verbales a operaciones aritméticas. |
| **Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones** | Representa gráficamente los problemas de operaciones combinadas. |
| **Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo** | Usa estrategias para el cálculo del complemento aritmético. |
| **Argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones** | Explica y argumenta las propiedades de la división entera. |

# Sustracción

Adición y sustracción de números hasta 10 000

Una fábrica de neumáticos tiene 387 llantas aro 14, 823 llantas aro 15 y 645 llantas aro 16. Un distribuidor hace un pedido de igual número de llantas de cada aro.

Luego de despachar el pedido se queda con un total de 1615 llantas.

VIDEO DE TEORÍA

**Responde:**

a) ¿De cuántas llantas fue el pedido? _____

b) ¿Cuántas llantas quedan de cada aro?

_____

**La sustracción** es la operación inversa a la adición. Consiste en: dados dos números llamados minuendo y sustraendo, buscar otro llamado diferencia que sumado con el sustraendo resulte igual al minuendo.

Por ejemplo, cuando restamos 120 – 40 buscamos un número que sumado con 40 sea igual a 120. Ese número es 80, ya que 80 + 40 = 120, o sea, 120 – 40 = 80 ⇔ 80 + 40 = 120.

**En general:**

$$M - S = D \Leftrightarrow D + S = M$$

minuendo – sustraendo – diferencia

**Resolviendo:** (Problema introductorio)

| | | |
|---|---|---|
| Aro 14: | 387 | + |
| Aro 15: | 823 | |
| Aro 16: | 645 | |
| Total: | 1855 | – |
| Quedan: | 1615 | |
| Se vendieron: | 240 | |

De cada aro se vendió:

240÷3 = 80 llantas

Quedan: Aro 14: 387 – 80 = 307

Aro 15: 823 – 80 = 743

Aro 16: 645 – 80 = 565

**Ten en cuenta**

**Caso especial de sustracción**

Al restar de un número de 3 cifras el que resulta de invertir el orden de sus cifras, resulta un número cuya cifra central es 9, al igual que la suma de sus cifras extremas.

$$\begin{array}{r} \overline{abc} - \\ \overline{cba} \\ \hline \overline{x9z} \end{array} \qquad x + z = 9$$

**Suma de los términos de una sustracción**

S + D = M

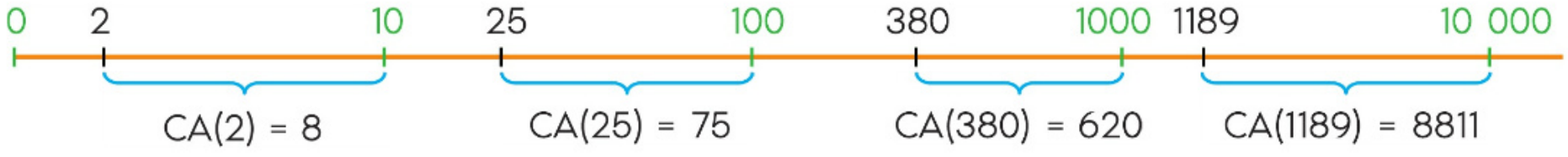
M + S + D = M + M

M + S + D = 2M

Los tres términos de la sustracción suman el doble del minuendo.

## Complemento aritmético (CA)

Consideremos algunos números en la recta logarítmica:




Resuelve problemas de cantidad (Aritmética)

**El complemento aritmético (CA)** de un número natural es lo que le falta para ser igual a la unidad inmediata superior de su cifra de mayor orden.

Por ejemplo, la cifra de mayor orden de 32 es 3 decenas, entonces el CA de 32 es lo que le falta para una centena.

$$CA(32) = 100 - 32 \Rightarrow CA(32) = 78$$

***Ejemplo***

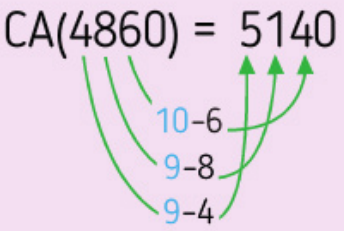
**Llena** la tabla con el CA correspondiente.

| Número | 13 | 69 | 568 | 989 | 7 689 | 99 000 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| CA | | | | | | |

**Ten en cuenta**

**Método práctico para calcular el CA**

La primera cifra significativa de la derecha del número se resta de 10 (base) y todas las demás, de 9. El resultado es el CA.




## Nivel básico

Resuelve problemas de cantidad (Aritmética)

**1** En un área de la reserva de Pampa Galeras se ha contabilizado 685 vicuñas. Por sobrepoblación se trasladaron a otra área cierto número, quedando 429 vicuñas. ¿Cuántas vicuñas se trasladaron?

**2** En un viaje turistico, Maritza gastó 2585 soles y Claudia, 1987 soles. ¿Cuánto más que Claudia gastó Maritza?

**3** Antonio y Rebeca invirtieron en una empresa. Rebeca invirtió 2350 soles menos que Antonio. Si Antonio tenía 4000 soles y luego de invertir se quedó con 1300, ¿cuánto invirtieron entre los dos?

**4** Araceli llevó de Chanchamayo a Lima 457 cajones de mango. Luego de vender una parte le quedan 198 cajones. ¿Cuántos cajones vendió?

**5** Jorge fue de compras con 1000 soles. Compró un aparato con 654 soles. Para comprar unos parlantes le faltó 148 soles. ¿Cuánto cuestan los parlantes?

## Nivel intermedio

**6** Vanessa cuenta con 136 soles. Compra una blusa de 79 soles. Para comprar un polo le faltan 21 soles. ¿Cuánto cuesta el polo?

**7** De un almacén sacaron 375 sacos de arroz. Al día siguiente repusieron 294, así el almacén quedó con 600 sacos. ¿Cuánto había antes que sacaran los 375 sacos?

**8** Orlando quiere comprar un abrigo pero le faltan 108 soles. Entonces con todo lo que tenía compró un sacón, el cual lo vendió en 400 soles ganando 187 soles. ¿Cuánto cuesta el abrigo?

**9** El C.A. de un número capicúa de tres cifras es otro capicúa de dos cifras. **Halla** la diferencia entre los números.

**10** **Halla** la suma de los C.A. de todos los números pares de dos cifras.

## Nivel avanzado

**11** Los términos de una sustracción se suman de dos en dos y se obtienen 62; 52 y 38. **Halla** la diferencia entre el sustraendo y la diferencia.

**12** ¿Cuál es el mayor número de tres cifras cuyo complemento aritmético es otro número también de tres cifras pero iguales?

**13** Araceli tiene que cubrir en su auto una ruta de 589 km para ir a su casa de campo. Cuando ya faltaba 234 km para llegar a su destino, se percató que había olvidado la llave de la casa a donde se dirigía y tuvo que volver a recogerla. ¿Cuántos kilómetros más de lo debido recorrió por causa del olvido?

**14** El complemento aritmético de un número de dos cifras es igual a la suma de sus cifras. ¿Cuál es este número?



## Tarea

**1** De las sustracciones $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{xy8}$; $\overline{pqr} - \overline{rqp} = \overline{6mn}$; $\overline{def} - \overline{fed} = \overline{rs4}$

**halla** $x + n - r - y + m$.

**2** Celia y Alicia reunieron 472 soles con fines benéficos. Si Celia hubiera reunido 28 soles menos y Alicia 35 soles más, ambas habrían reunido la misma cantidad. ¿Cuánto reunió cada una?

**3** Para comprar una casaca de 234 soles, a Gerónimo le faltan 38 soles más que para comprar un pantalón. Si Gerónimo tiene 150 soles, ¿cuánto cuesta el pantalón?

**4** La suma de $\overline{abc}$ y el C.A. de $\overline{cba}$ es $\overline{def2}$. **Halla** $a \times c + e \times f$.

# Multiplicación y división

Adición y sustracción

Genaro trabaja en un depósito de bebidas. Para atender un pedido de 2400 botellas, ya cumuló en cajas de 20 botellas una parte, que son las que se muestran.

El resto del pedido lo atenderá en la misma modalidad.

VIDEO DE TEORÍA

**Responde:**

**a)** ¿Cuántas botellas faltan? _____

**b)** ¿Cuántas cajas serán necesarias? _____

**La multiplicación** es una adición de cantidades iguales. Por ejemplo, 3 + 3 + 3 + 3 + 3 (5 veces 3) se expresa como 5×3 o 5·3, tal que 5×3 = 15.

En general:

$$\underbrace{m + m + m + .... + m}_{\text{M sumandos}} = \overbrace{M \times m}^{\text{Factores}} = P$$

P ← Producto; M ← Multiplicador; m ← Multiplicando

**Resolviendo:** (Problema introductorio)

Número de cajas acumuladas: 4×6×3 = 72

Número de botellas: 72×20 = 1440

N° de botellas que faltan: 2400 - 1440 = 960

N° de cajas que faltan: 960÷20 = 48

## Multiplicación por potencias de 10

Para multiplicar un número por la unidad seguido por ceros, basta agregarle a la derecha la misma cantidad de ceros.

- 34×100 = 3400
- 172×1000 = 172 000

## Multiplicación por un número de cifras 9

Todo número formado por cifras 9 es el antecesor de una potencia de 10, por consiguiente se puede expresar como la potencia de 10 disminuido en 1:

- 34×999 = 34×(1000 – 1) = 34×1000 – 34

34 000 – 34 = 33 966

∴ 34×999 = 33 966

**Ten en cuenta**

**Propiedades de la multiplicación**

**Clausura o cerradura**
El producto de dos números naturales es siempre otro natural.

**Conmutativa**
El profesor dispuso las chapas en la forma mostrada y preguntó cuántas chapas había. Néstor dijo que hay 4 filas de 5 chapas: 4×5 = 20.

Alina dijo que hay 5 columnas de 4 chapas: 5×4 = 20.

4×5 = 5×4

No importa el orden en que se multipliquen dos factores, el producto es el mismo.

# División de números naturales

**La división** es la operación inversa a la multiplicación. Consiste en: dados dos números, llamados **dividendo** y **divisor**, encontrar un tercero llamado **cociente** que multiplicado por el divisor resulta igual al dividendo.

Cuando existe este número se dice que la división es **exacta**, en caso contrario, **inexacta**, en cuyo caso se busca que el producto por el divisor se acerque al dividendo y la diferencia se llama **resto** o **residuo**.

**División exacta:**

- $48 \div 6 = 8 \Leftrightarrow 48 = 6 \times 8$

$D \div d = q \Leftrightarrow D = dq$

**División inexacta:**

- $50 \div 6 \Rightarrow 50 = 6 \times 8 + 2$

$$\begin{array}{r|l} 50 & 6 \\ 2 & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ r & q \end{array} \Rightarrow D = dq + r$$

- $D$: Dividendo
- $d$: Divisor
- $q$: Cociente
- $r$: Resto

$0 \leq r < d$

***Ejemplo***

Genaro quiere colocar 375 botellas en cajas de 12 botellas. ¿Cuántas cajas necesita? ¿Cuántas botellas sobrarían?

**Resolviendo:**

$$\begin{array}{r|l} 375 & 12 \\ 36 & 31 \\ 15 & \\ 12 & \\ 3 & \end{array}$$

- Se necesitan 31 cajas.
- Sobrarían 3 botellas.

**Asociativa**

A Carlos y Donato le dieron a multiplicar: 237×25×4.

Carlos multiplicó así:

$273 \times 25 \times 4$

6825

27300

Donato multiplicó así:

$273 \times 25 \times 4$

100

27300

El modo como se asocien los factores para multiplicar no cambia el producto.

$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

**Elemento neutro**

El elemento neutro de la multiplicación es 1. Cualquier número multiplicado por 1, es el mismo número.

**Elemento absorbente**

El elemento absorbente de la multiplicación es 0. Cualquier número multiplicado por 0, es cero.

Resuelve problemas de cantidad (Aritmética)

## Nivel básico

**1** Los alumnos del salón de Jairo se formaron en 5 filas de 7 miembros. ¿Cuántos alumnos son?

**2** Marlene ha comprado una sandía de 3500 gramos y la ha dividido en 7 partes iguales. Si repartió entre sus amigos 4 partes, ¿con cuántos gramos se quedó?

**3** La seguridad de la puerta de un evento musical deja entrar a los espectadores en grupos de 6. En media hora deja entrar a 85 grupos. ¿Cuántas personas entran en ese tiempo?

**4** En un momento dado, hay 8 clientes en una juguería. Cada uno pide un vaso de jugo. Si cada vaso contiene 650 mililitros, ¿cuántos mililitros consumen entre todos?

**5** Celso hizo compras según la siguiente boleta de venta. ¿Cuál fue el importe de la compra?

| Cant. | Concepto | Precio | Importe |
|---|---|---|---|
| 7 | Camisas | 84 | |
| 5 | Pantalones | 98 | |
| 12 | Polos | 28 | |
| | | Total: | |

## Nivel intermedio

**6** Víctor y Sara tienen una granja de aves. Los dos contrataron un camión para llevar pollos al mercado. Víctor llevó 352 pollos y Sara, 412. Si los pollos se vendieron a 12 soles cada uno, ¿cuánto más que Víctor recaudó Sara?

**7** Marcos compró 35 kilogramos de papa para su negocio, por un valor de 105 soles. El primer día utilizó 12 kilogramos. ¿Cuánto gastó ese día en papa?

**8** Melisa compró una torta que pesa 2 kilogramos, la partió en 8 y las repartió entre sus amigos, quedándose con 750 gramos. ¿Cuántas partes repartió?

**9** La mamá de Teresa se dedica a la costura. Ha comprado 20 docenas de botones para confeccionar 30 camisas. Si cada camisa usa el mismo número de botones, ¿cuánto es este número?

**10** Ángela tiene ahorrados 250 soles. Si empieza a ahorrar 13 soles por día, ¿cuánto tendrá ahorrado en 45 días?

## Nivel avanzado

**11** Una piscina tiene 16 metros de largo, 6 metros de ancho y 2 metros de profundidad. Esta piscina tiene un grifo de llenado que vierte 80 litros de agua por minuto y otro de vaciado que expulsa a razón de 60 litros por minuto.

a) ¿Qué cantidad de agua llena completamente la piscina?

b) Estando vacía la piscina y abierto el grifo de vaciado se abre la llave de llenado. ¿En cuánto tiempo se llena la piscina?

**12** En el problema anterior:

Luego de abrir la llave de llenado durante una hora, se abre la de vaciado. Desde ese instante, ¿en qué tiempo se llena la piscina?

**13** La profesora de lenguaje dejó la tarea de que en 15 días sus alumnos completaran 5 horas de lectura cada uno. ¿Cuántos minutos diarios tiene que leer cada niño?

**14** Sergio compra una docena de chocolates por 36 soles y los vende a 50 soles la decena. ¿Cuántos chocolates debe vender para ganar 136 soles?



## Tarea

**1** Ariana vendió 42 kilos de pollo a 8 soles por kilo. ¿Cuánto obtuvo por la venta?

**2** Un edificio de 8 pisos cuenta con 6 departamentos por piso. Si cada departamento tiene 5 ventanas, ¿cuántas ventanas tiene el edificio?

**3** A un partido de vóley asistieron 124 aficionados. Si se recaudó 744 soles por entradas, ¿cuánto pagó cada asistente?

**4** Cuando Iván estuvo a punto de comprar 60 cintas de embalaje a 7 soles cada una, otro comerciante le ofreció lo mismo a menos precio, así que compró por el mismo monto 24 unidades más. ¿A qué precio compró?

# Operaciones combinadas

4 operaciones básicas

Valentín es el capitán del equipo de fútbol del barrio. Cuando participaron en un campeonato, después del último partido que les tocó jugar fue a la bodega a comprar con 100 soles refrescos de 2 soles y queques de 3 soles para los 12 jugadores.

VIDEO DE TEORÍA

**Responde:**

**a)** ¿Qué operación realizó el bodeguero para dar el vuelto a Valentín? _____

**b)** ¿Cuánto recibió de vuelto Valentín? _____

En la práctica cotidiana, las operaciones matemáticas se presentan en forma combinada y hay que efectuarlas según el orden de prioridad que exige la necesidad del contexto.

En este capítulo vamos a practicar diversas estrategias para resolver problemas donde intervienen las **operaciones matemáticas combinadas.**

**Resolviendo:** (Problema introductorio)

**a)** Vamos a efectuar en dos formas:

**Una primera forma:**

12 gaseosas y 12 queques cuestan: $12\times2 + 12\times3$

El vuelto es la diferencia: $100 - (12\times2 + 12\times3)$

**Una segunda forma:**

Una gaseosa y un queque cuestan: $2 + 3$

12 parejas cuestan: $12\times(2 + 3)$

El vuelto es la diferencia: $100 - 12(2 + 3)$

**b)** Efectuando de las dos formas:

$$100 - (\underbrace{12\times2}_{24} + \underbrace{12\times3}_{36}) = \underbrace{\underbrace{100 - 60}_{40}}$$

$$100 - \underbrace{12(\underbrace{2 + 3}_{5})}_{60} = \underbrace{\underbrace{100 - 60}_{40}}$$

Obsérvese la importancia de efectuar las opresiones en forma ordenada, de acuerdo al orden de prioridad determinado por el problema.

**Ten en cuenta**

**Propiedades de la multiplicación**

**Orden de prioridad de las operaciones.**

Prioridad significa cuál operación se efectúa primero y cuál después.

Una forma de indicar en qué orden se deben efectuar las operaciones es mediante los signos de agrupación o colección:

Paréntesis: ( )
Corchetes: [ ]
Llaves: { }

Si estos signos se efectúa primero las operaciones dentro de ellos.

Si no aparecen signos de colección, las operaciones se efectúan en el siguiente orden:

**1°** La potenciación y radicación.

**2°** La multiplicación y división.

**3°** La adición y sustracción.

Las operaciones de la misma jerarquía se efectúan de izquierda a derecha.

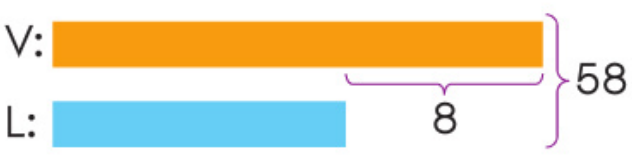
## Cómo hallar dos números conociendo su suma y su diferencia

### *Ejemplo 1*

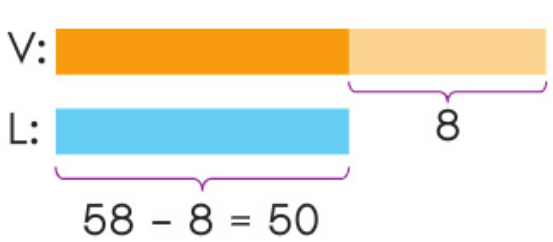
Vanessa y Leonardo tienen 58 soles entre los dos. Vanessa tiene 8 soles más que Leonardo. ¿Cuánto tiene cada uno?

**Resolviendo:**

Representemos gráficamente lo que tienen:




Si a la suma le quitamos la diferencia:




- Leonardo tiene: 50÷2 = 25
- Vanessa tiene: 25 + 8 = 33

**Ten en cuenta**

**Cálculo de dos números conociendo la suma y la diferencia.**

Sean dos números $a$ y $b$, tal que:

$$\begin{array}{l} a + b = S \\ a - b = D \end{array} \quad +$$

$$2a = S + D$$

$$a = \frac{S + D}{2}$$

$$b = \frac{S - D}{2}$$

### *Ejemplo 2*

**Completa** la tabla calculando los números cuya suma y diferencia se conocen.

| $a + b$ | 40 | 52 | 60 | 120 | 200 | 360 | 400 | 660 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a - b$ | 30 | 2 | 20 | 60 | 150 | 120 | 100 | 60 |
| $a$ | | | | | | | | |
| $b$ | | | | | | | | |

## Estrategias para resolver problemas matemáticos

1. **Leer.-** Hay que leer respetando los signos de puntuación. Si es necesario, hacerlo varias veces, hasta entender completamente o buena parte del problema.
2. **Esquematizar.-** Hay que representar con un esquema, gráfico o dibujo lo que se ha entendido del problema, anotando los datos más resaltantes.
3. **Resolver.-** Con los pasos anteriores debemos elaborar la estrategia y ejecutarla para llegar a la solución.
4. **Comprobar.-** Una vez obtenida la solución, es recomendable verificar que ella satisface las condiciones del problema.

### *Ejemplo 3*

Las hermanas Cloti y Eva compraron con sus ahorros un regalo de S/. 72 para papá. Cloti, por ser la mayor, puso el triple de lo que puso Eva.

a) ¿Cuánto más que Eva puso Cloti?

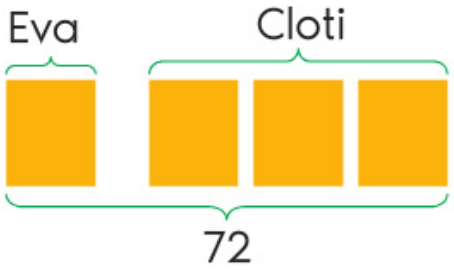
b) Para poner en partes iguales, ¿cuánto le faltaría a Eva?

**Resolviendo:** Seguimos los pasos que hemos mencionado.

**1. Leemos:**

Podemos notar que Cloti puso más dinero que Eva, además, lo que puso Cloti más lo que puso Eva deben sumar los 72 soles.

**2. Esquematizamos:**



### 3. Resolvemos:

Se observa que Eva puso la cuarta parte del total:

- Eva puso: 72÷4 = 18 soles
- Cloti puso: 3×18 = 54 soles

a) Cloti puso 54 – 18 = 36 más, o 2×18 = 36 más que Eva

b) Mitad de 72 es 72÷2 = 36, a Eva le faltaría 36 – 18 = 18 para poner en partes iguales.

### 4. Comprobamos:

- Entre las dos ponen 72: 54 + 18 = 72
- Cloti pone el triple de Eva: 54 = 3×18

## Nivel básico

**1** **Mira** cómo resolvieron: 4 + 5×6 – 4

Javier:

$4 + 5\times6 - 4 = 50$

9 – 54

Edgar:

$4 + 5\times6 - 4 = 18$

9 2 ×

¿Quién operó correctamente? Justifica.

**2** Con 50 soles compro 3 helados de 5 soles y 4 chocolates de 7 soles. Expresa la operación que debo realizar para calcular mi vuelto.

**3** Saúl compra 5 lampas de 35 soles y José, 8 picos de 23 soles. ¿Quién gasta más y cuánto más?

**4** Benjamín y Óscar compraron galletas y gaseosas. Uno de ellos compró 17 galletas de 3 soles y el otro, 9 gaseosas de 6 soles. Si Óscar gastó más, ¿quién compró las galletas?

**5** Velmina y José compraron pescado en Paita para enviar a Lima. Velmina envió 42 jabas con 21 pescados cada uno y José, 38 jabas con 24 pescados cada java. **Expresa** la operación que indica la diferencia entre el número de pescados que compró una y otro.

## Nivel intermedio

**6** **Coloca** las cifras 2; 3; 4; 5 y 6 en los recuadros, para que el resultado sea entero y lo máximo posible:

$$[(\square + \square) \div \square - \square] \times \square$$

**7** En una caja grande se colocan 4 cajas medianas y en cada una de estas, 4 cajitas y en cada cajita otras 4 cajitas más pequeñas. ¿Cuántas cajas se tiene en total?

**8** Un caño vierte 40 litros de agua por minuto. Otro caño vierte en dos horas 7200 litros más que el primero. ¿Cuántos litros por minuto vierten los dos juntos?

**9** Andrés salió de Lima a Ica. Cuando había recorrido 20 kilómetros más de lo que le faltaba para llegar a su destino se detuvo. ¿En qué kilómetro se detuvo si Ica está en el kilómetro 300?

**10** Si Ángel tiene el doble de Miguel y Óscar tiene el triple de Miguel, ¿cuánto tienen entre los tres si Ángel y Miguel tienen S/. 36?

## Nivel avanzado

**11** Aníbal y su esposa se pusieron a ahorrar. Él ahorra mensualmente 150 soles más que la esposa. Si luego de 8 meses han ahorrado 6400 soles entre los dos, ¿cuánto ahorra mensualmente la esposa?

**12** Un camión lleno de frutas pesa 3600 kilogramos, pero cuando está lleno hasta la mitad pesa tan solo 3200 kg. ¿Cuánto pesa el camión vacío?

**13** A tiene el doble de B, y C el triple de B. C da a B S/. 16 para que ambos tengan lo mismo. ¿Cuánto tiene A?

**14** En una partida de ajedrez, el número de ganadores es igual al número de empatadores. ¿Cuántas partidas se empataron si en total participaron 84 personas?



## Tarea

**1** Una madre que carga su bebé se pesa y la balanza marca 72 kilogramos. ¿Cuánto pesa el bebé si la mamá pesa 62 kilos más?

**2** Una pareja de esposos ahorra entre los dos 8400. Si él ahorró el triple de la esposa, ¿cuál es el ahorro de ella?

**3** Las edades de dos hermanos suman 54 años. Si cuando el menor nació, el mayor ya tenía 18 años, ¿cuáles son las edades de los dos hermanos?

**4** Entre Carlos y Jorge tienen 48 soles. Si Carlos le diera a Jorge 6 soles, ambos tendrían la misma suma. ¿Cuánto tiene cada uno?

# Reforzando - Unidad 2

**1** Arthur lanzó 6 dados, con tal suerte que obtuvo un puntaje diferente en cada dado. ¿Cuál es su puntaje total?

A) 42 B) 21 C) 28
D) 15 E) 23

**2** A Gerónimo le faltan 24 soles para comprar una pelota de 85 soles. ¿Cuánto tiene Gerónimo?

A) 61 B) 109 C) 62
D) 59 E) 60

**3** Hilda compra los siguientes juguetes:

S/. 56

S/. 73

S/. 65

a) ¿Cuánto paga en total?

b) ¿Cuánto más cuesta la pelota que el carrito?

c) ¿Cuánto menos cuesta el osito que la pelota?

A) 194; 12; 15 B) 194; 8; 17
C) 184; 12; 17 D) 194; 8; 15

**4** En una estación de autos hay 5 áreas de parqueo con capacidad para 8 autos cada una. Si en cada área faltan 2 autos para completar su capacidad, ¿cuántos autos hay en la estación?

A) 28 B) 40 C) 10
D) 30 E) 20

**5** Para la actuación del primer bimestre de un colegio, se colocaron en el auditorio 40 filas de 32 asientos cada una. ¿Cuántas personas pueden sentarse?

A) 1280 B) 1820
C) 1320 D) 1300

## Olimpiadas nacionales e internacionales

**6** Un tren tarda 150 minutos en cubrir una ruta de ida, pero la ruta de vuelta lo hace en 160 minutos por ser de subida. ¿En qué tiempo hace 3 viajes de ida y vuelta?

A) 12 h 30 min B) 15 h 10 min
C) 14 h 30 min D) 13 h 30 min
E) 15 h 30 min

**7** En el mercado de frutas, un camión ha descargado 40 cajones de mangos con un promedio de 24 mangos por cajón. ¿Cuántos mangos se espera que haya en total?

A) 920 B) 820 C) 960
D) 950 E) 940

**8** Para construir el muro de mi casa se ha utilizado 9 ladrillos de largo, 9 ladrillos de ancho y 9 ladrillos de alto. ¿Cuántos ladrillos se han utilizado en total?

A) 739 B) 629
C) 729 D) 700

**9** Cada día el conejo Venya come 10 zanahorias o 2 coles. La semana pasada comió 6 coles. ¿Cuántas zanahorias comió?

A) 20 B) 30 C) 34
D) 40 E) 50

**10** Fernanda tiene una deuda con el banco de S/. 229 040. Si realiza un pago de S/. 12 140 y el resto lo paga mensualmente durante 15 años sin intereses, ¿cuánto paga cada mes?

A) 1200 B) 1205
C) 1220 D) 1500

**11** Un grupo de amigos organiza una rifa. Para el premio compran un celular que les costó 240 soles. Si vendieron 80 boletos a 5 soles cada uno, ¿cuánto ganaron en la rifa?

A) 260 B) 400 C) 162
D) 159 E) 160

**12** Un comerciante de pescado ha comprado 342 bonitos en Paita. A la hora de enviar a Lima, solo 150 entraron en un camión frigorífico y el resto tuvo que mandar en 8 jabas con hielo con igual número de pescados cada una. ¿Cuántos bonitos entró en cada jaba?

A) 24 B) 26 C) 28
D) 20 E) 22

**13** Al formar 18 filas con 75 soldados, sobran 3 soldados. ¿Cuántos soldados hay en cada fila?

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

**14** El aforo de un edificio es de 360 personas. En un momento dado hay 218 personas. Si salen 38 personas y entran 83, a lo más, ¿cuántas personas más podrían entrar al edificio en ese momento?

A) 92 B) 95 C) 97
D) 263 E) 236

**15** En el mercado de flores, la docena de rosas cuesta 25 soles. Marilú compró 2 docenas y las vendió por unidad en el Día de la Madre. Si ganó 46 soles, ¿a qué precio vendió cada rosa?

A) S/. 3 B) S/. 4 C) S/. 5
D) S/. 6 E) S/. 7

**16** Calcula el número que sigue en la sucesión:

5; 7; 10; 14

A) 15 B) 16 C) 17
D) 18 E) 19

**17** Determina cuántos números de la forma $\overline{abc}$ verifican la condición:

$$C.A.(\overline{abc}) = 8a + 6b + 3c$$

A) 2 B) 3
C) 4 D)6

**18** Si al número $\overline{a23b}$ se le aumenta $\overline{5cd7}$, se obtiene $\overline{98b2}$.

Halla $a + b + c + d$.

A) 13 B) 15
C) 14 D) 16

**19** Una caja contiene 4 discos rojos, 4 discos azules y 4 discos amarillos, todos del mismo tamaño. Wendell toma cierta cantidad de discos de la caja, sin poderlos ver. ¿Cuál es el menor número de discos que Wendell debe tomar para estar absolutamente seguro de haber sacado dos discos del mismo color?

A) 10 B) 8 C) 6
D) 4 E) 2

**20** Tatiana compró dos jarras decorativas, a 45 soles una y 54 soles la otra. Vendió ganando la misma suma en ambas ventas. Si su venta fue de 159 soles, ¿cuánto ganó en cada una?

A) S/. 20 B) S/. 25 C) S/. 30
D) S/. 50 E) S/. 60

**21** Al gato Félix le gusta cazar pajaritos, pero a lo más uno por día. Cada vez que caza un pajarito come la mitad de su menú diario de comida. Si su comida de la semana pasada le duró para dos días más, ¿cuántos pajaritos cazó esa semana?

A) 2 B) 4 C) 3
D) 5 E) 1

**22** Carlos, Catalina y Carolina son hermanos. Catalina tiene 12 años, Carlos tiene 3 años más que Carolina y 4 años menos que Catalina.
¿Cuál será la diferencia entre las edades de Catalina y Carolina dentro de 15 años?

A) 17 años B) 6 años C) 7 años
D) 8 años E) 23 años

**23** Averigua los sumandos que faltan:

| | |
|---|---|
| 3 9 5 + | 5 2 8 + |
| _____ | _____ |
| 5 8 7 | 9 2 4 |

**24** En una tienda comercial ofrecen un osito de peluche a 27 soles y a 300 soles la docena. Si Fernando compró 27 ositos de peluche, ¿cuánto pagó? Explica.

**25** Feliciano presta servicios de paseo en lancha a los turistas en el Lago Titicaca. En la lancha caben hasta 18 pasajeros. Los precios corporativos son de 15 soles por pasajero hasta grupos de 10 y a 12 soles cuando son más de 10 pasajeros. Sus gastos operativos son de 30 soles sin importar el número de pasajeros. Un día hizo dos viajes, el primero con un grupo de 8 turistas y el segundo con otro grupo de 17 turistas. ¿Cuál fue su ganancia del día?

**26** Rina cría 8 gatitos. Cada gatito demanda un gasto de 5 soles por semana. Ella dispone de un gasto de hasta 55 soles por semana. ¿Cuántos gatitos más puede criar?

**27** En una granja hay cerdos, caballos y vacas. La cantidad de animales de cada especie está dada por números consecutivos, aunque no necesariamente en el orden respectivo en que fueron mencionados. El números total de animales es un número de dos cifras diferentes y el mayor posible. Si hay más vacas que cerdos y menos caballos que cerdos, ¿cuántos animales hay de cada especie?

**28** Efraín tarda 4 horas en hacer una silla y 5 horas en hacer una mesa. ¿Cuántos días de 8 horas de trabajo tardará en hacer 8 juegos de comedor consistente cada uno de una mesa y 6 sillas?

**29** Al dividir un número de 3 cifras entre el número formado por sus dos últimas cifras se obtiene 34 de cociente y 7 de residuo. Encuentre la suma de los cuadrados de los dígitos que forman dicho número.

**30** Un comerciante compra 840 prendas de vestir. El fabricante le regala una prenda de vestir más por cada docena que compre. ¿Cuántas prendas de vestir ha recibido en total el comerciante?

**31** En un concurso de TV, tres concursantes intentan acertar el número de fabes de un tarro. Uno dice 260, otro 274 y otro 234. Si un concursante se equivocó en 9, otro en 17 y otro en 31, ¿cuál es el número de fabes del tarro?

**32** En una caja hay siete cartas numeradas del 1 al 7. Luis toma tres cartas. Antonia, su amiga, escoge dos y deja otras dos en la caja. Tras mirar las suyas, Luis asegura a Antonia: "La suma de tus cartas es par". ¿Cuánto suman las cartas de Luis?

**33** Un albañil debe combinar una bolsa de cemento con 60 kilos de arena fina. La única medida que tiene para medir la cantidad de arena es una carretilla donde caben 50 kilogramos. Amontona un número exacto de carretilladas de arena y vierte las bolsas de cemento con la seguridad de que está haciendo la mezcla en la proporción correcta. ¿Cuál es el mínimo número de carretilladas que utiliza?

**34** Un grupo de niños va al cine y reúne el dinero para pagar la entrada entre todos.

Si cada uno coloca S/. 8 les faltan S/. 23.
Si cada uno coloca S/. 9 sobran S/. 23.
¿Cuántos niños fueron al cine?

# Autoevaluación

**1** María fue de compras con 3 billetes de 100 soles. Compró una cartera de 85 soles, un sombrero de 74 soles y una falda de 60 soles. Cuando se disponía a comprar una blusa se percató de que le faltaban 25 soles. ¿Cuánto cuesta la blusa?

**2** Dos trenes se desplazan por las mismas vías pero en direcciones opuestas, de tal forma que en algún momento chocarán. Uno de ellos viaja a 315 Km/h y el otro a 200 Km/h.

¿Qué distancia separa a los dos trenes una hora antes de la colisión?

**3** Una abeja produce 2 gramos de miel por día en primavera, mientras que en otoño solo puede producir 1 gramo por día. Un panal de abejas que en verano produce 1500 gramos de miel, ¿cuánto produce en otoño, si encima se mueren 100 abejas por falta de flores?

**4** Tres albañiles utilizan diariamente 8 bolsas de cemento y 15 carretillas de arena gruesa. El maestro de obras ha planificado trabajar durante una semana (6 días) en doble turno y con 6 albañiles por turno. ¿Cuántas bolsas de cemento y cuántas de carretillas de arena gruesa debe alistar?

**5** ¿Cuántos números mayores que 10 y menores que 100 se incrementan en 9 cuando sus dígitos se invierten? Explique.

**6** Un taxista cobra 5 soles por el primer kilómetro y 2 soles por cada kilómetro adicional. ¿Cuánto cobra por un servicio de 20 kilómetros?

# 3 La divisibilidad

La divisibilidad permite determinar si un número es divisible entre otro, y, en caso de que no lo fuera, permite calcular el residuo de un modo práctico y sencillo.

### Respetamos las opiniones de los demás.

Así como tenemos derecho a plantear nuestra opinión, tenemos el deber de escuchar la opinión de los demás; que no necesariamente tiene que coincidir con la nuestra. Las personas tienen diferentes formas de ver las cosas, según su nivel cultural, su especialidad, la experiencia personal, su conocimiento del tema, en fin, por diversas razones, pero todas esas opiniones deben ser respetadas, y cuando se tiene que tomar una decisión se hace por una votación democrática.

| Resuelve problemas de cantidad (Aritmética) | |
|---|---|
| **Capacidades** | **Desempeños** |
| **Traduce cantidades a expresiones numéricas** | Traduce la notación y representación de la multiplicidad de números. |
| **Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones** | Explica el cálculo del resto mediante el uso de los criterios de divisibilidad. |
| **Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo** | Utiliza los principios y criterios de la divisibilidad para el cálculo de restos. |
| **Argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones** | Analiza los principios y deduce los criterios de la divisibilidad. |

Multiplicación y división

# DIVISIBILIDAD: Principios

El domingo 9 de junio de 2019, Santiago le preguntó a Karla por la fecha de su cumpleaños. Ella respondió que cumplía 10 años el 10 de setiembre.

- ¿Sabes qué día de la semana cae? – preguntó Santiago.
- Eso lo puedes calcular - respondió Karla.

VIDEO DE TEORÍA

**Responde:**

¿Qué día de la semana cae el cumpleaños de Karla en el año 2019?

Frecuentemente se presenta el caso en que uno quiere saber si una cantidad de objetos se puede dividir en partes iguales. **La divisibilidad** nos ayuda a resolver este tipo de problemas de una forma muy sencilla.

**Resolviendo:** (Problema introductorio)

| | |
|---|---|
| Junio | 21 días |
| Julio | 31 días |
| Agosto | 31 días |
| Setiembre | 10 días |
| Total: | 93 días |

$$\begin{array}{r|l} 93 & 7 \\ 91 & 13 \\ \hline 2 & \end{array} \Rightarrow 93 = 7\cdot 13 + 2$$

$$93 = \overset{\circ}{7} + 2$$

Esto quiere decir que pasará un número exacto de semanas y 2 días más.

$\therefore$ Cumplirá años el día martes.

## Múltiplos de un número

**Múltiplos de 3:** 0 3 6 9 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ …

**Múltiplos de 4:** 0 4 8 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ …

**Múltiplos de 7:** ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ …

### *Ejemplo 1*

**Halla** la suma de los 6 primeros múltiplos de 4 de dos cifras.

### *Ejemplo 2*

¿Cuántos múltiplos de 7 existen entre 20 y 60? **Escribe,** luego cuenta.

**Ten en cuenta**

**DIVISIBILIDAD**

- El número 45 es divisible entre 9 porque:

$$\begin{array}{r|l} 45 & 9 \\ 0 & 5 \end{array} \Rightarrow 45 = 9\times 5$$

$$45 = \overset{\circ}{9}$$

Residuo — Múltiplo de 9

O sea, al dividir 45 entre 9 el residuo es 0. Además, 45 se puede expresar como el producto de 9×5.

Entonces:

divisible entre - múltiplo de

45 módulo → 9

divisor de - divide a

- El número 48 no es divisible entre 9. Sin embargo:

$$\begin{array}{r|l} 48 & 9 \\ 3 & 5 \end{array} \Rightarrow 48 = 9\times 5 + 3$$

$$48 = \overset{\circ}{9} + 3$$

Cuando no es múltiplo, se expresa como múltiplo del módulo más un resto.

## Principios de la divisibilidad

**1.** Si sumamos múltiplos del mismo módulo, la suma también resulta múltiplo del módulo.

$$24 + 30 + 36 = 90$$
$$\overset{\circ}{6} \quad \overset{\circ}{6} \quad \overset{\circ}{6} \quad \overset{\circ}{6}$$

En general:

$$\overset{\circ}{n} + \overset{\circ}{n} + \overset{\circ}{n} + \overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}$$

**2.** Si al múltiplo de un módulo multiplicamos por cualquier número natural, el producto sigue siendo múltiplo del módulo.

$$5 \times 18 = 90$$
$$\overset{\circ}{9} \quad \overset{\circ}{9}$$

En general:

$$k(\overset{\circ}{n}) = \overset{\circ}{n}$$

**3.** Si un número es múltiplo de varios módulos, es múltiplo del menor múltiplo común de los módulos.

Sea: $A = \overset{\circ}{5}$

$A = \overset{\circ}{6}$ $\Rightarrow A = \overset{\circ}{30}$

$A = \overset{\circ}{10}$

Menor múltiplo común de 5; 6 y 10.

### *Ejemplo 3*

Joselo cuenta sus caramelos de 5 en 5 y le sobran 3. Aumenta 24 y vuelve a contar de 5 en 5. ¿Cuánto le sobra esta vez?

### *Ejemplo 4*

Julissa piensa en un número cuya división entre 6 da un resto de 4. Si el número lo multiplica por 5 y vuelve a dividirlo entre 6, ¿cuál será el resto?

### *Ejemplo 5*

Gisela cuenta sus galletas de 7 en 7 y le sobran 5. Sandra hace lo mismo con las suyas y le sobran 6. Si las dos juntan sus galletas y las vuelven a contar de 7 en 7, ¿cuánto les sobrará?

Resuelve problemas de cantidad (Aritmética)

### Nivel básico

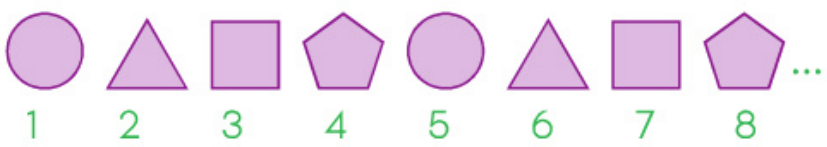
**1** **Escribe** los 5 primeros múltiplos de 6 de dos cifras y calcula la suma.

**2** ¿Cuántos múltiplos de 6 hay entre 20 y 50?

**3** Romina cuenta las piezas de su rompecabezas de 7 en 7 y le sobran 6. Ángela tiene un rompecabezas con triple número de piezas que el de Romina. Si Ángela contara sus piezas de 7 en 7, ¿cuántas le sobrarían?

**4** Si hoy es martes, ¿qué día será dentro de 30 días?

**5** En esta secuencia de figuras, ¿qué figura le tocará al número 70?




## Nivel intermedio

**6** Cuando el profesor de educación física formó con los alumnos grupos de 8, sobraron 5. En ese momento llegaron 21 alumnos y con todos volvió a formar grupos de 8. ¿Cuántos le sobraron esta vez?

**7** Un número A es divisible entre 6. Se le suma 5 y luego se le multiplica por 4. Cuando este resultado se divida entre 6, ¿qué resto se obtendrá?

**8** José Luis visitó a la tía Laura un día lunes y volverá a visitarla dentro de 60 días. ¿Qué día de la semana será ese día?

**9** Lina vive en la Selva. Cada vez que llueve fuerte, en el techo de la casa se activan dos goteras: una cada 6 segundos y la otra cada 8 segundos. ¿Cada cuántos segundos coinciden las goteras?

**10** La abuelita Manuela vive en un cerro y para llegar a su casa debe subir por una escalera de 80 escalones. En la subida, ella descansa cada 12 escalones. ¿En qué escalón descansa por quinta vez, y faltando cuántos escalones descansa por última vez?

## Nivel avanzado

**11** En la siguiente secuencia:

$3\times a^1$ ; $2\times a^2$ ; $5\times a^3$ ; $3\times a^4$ ; $2\times a^5$ ; $5\times a^6$ ; ...

¿cuál será el coeficiente de $a$ cuando su exponente sea 100?

**12** Apenas son las 3 de la mañana y los gallos empiezan a cantar – dice José: mi gallo canta cada 15 minutos y el de mi vecina cada 20.

¿Cada cuántos minutos cantan a la vez, y a qué hora cantan juntos por tercera vez?

**13** El tren de la Línea 1 sale de Bayóvar cada 8 minutos. El primer tren sale a las 6 de la mañana. El tren tarda 12 minutos en llegar a la estación Los Jardines. Un pasajero que llega a la estación a las 8:30, ¿cuánto tiempo debe esperar para abordar el tren?

**14** Roberto visita al tío Ruperto cada 5 días. Si lo visita un día domingo, ¿después de cuántos días volverá a visitarlo un domingo?

## Tarea

**1** Si hoy es sábado, ¿qué día será dentro de 30 días?

**2** El teniente Bonilla puede, con los soldados de su batallón, formar grupos de 8, sobrándole 6. El teniente Castillo puede hacer lo propio con los suyos, sobrandole 7. Si se juntan los soldados de los dos batallones, ¿cuántos sobrarían al agruparlos de 8 en 8?

**3** En un aviso luminoso se alternan cada segundo los colores rojo, verde, azul y amarillo, en ese orden. En el primer segundo después de las 12 empieza con el rojo. ¿Qué color aparece a las 12 con 2 minutos y 7 segundos?

**4** El profesor de música pide que el bombo suene cada 3 segundos y el platillo, cada 5 segundos. Al inicio de la pieza musical suenan ambos. Si la pieza dura 6 minutos, ¿cuántas veces coinciden el bombo y el platillo?

# Criterios de divisibilidad I

Principios de divisibilidad

Melisa tiene 9 672 vasijas, que quiere venderlas en paquetes aunque está indecisa entre empaquetar de 5 en 5 o de 8 en 8 .

Ella no quiere que sobre ninguna vasija cuando haya empaquetado todas.

VIDEO DE TEORÍA

**Responde:**

¿En qué caso sobra y cuánto? _____

**Los criterios de divisibilidad** nos permiten determinar, sin necesidad de dividir, si un números es divisible entre un módulo y, en caso de que no fuera divisible, nos permite calcular el resto de un modo sencillo y práctico.

**Resolviendo:** (Problema introductorio)

- **Analizamos la divisibilidad entre 8:**

$9672 = 9\times\underbrace{1000}_{\overset{\circ}{8}} + 672$

$9672 = \overset{\circ}{8} + \underbrace{672}_{\overset{\circ}{8}}$

$9672 = \overset{\circ}{8} + \overset{\circ}{8} = \overset{\circ}{8}$

1000 es múltiplo de 8, por consiguiente 9×1000 es múltiplo de 8.

Para que 9672 sea múltiplo de 8 solo depende de 672, o sea, del número formado por las 3 últimas cifras.

Para averiguar si 9672 es múltiplo de 8 solo dividimos 672 entre 8.

672 | 8 ⇒ $672 = \overset{\circ}{8}$
64 | 84
32
32
--

Como 9672 es divisible o múltiplo de 8, al empaquetar de 8 en 8 no va sobrar ninguna vasija.

- **Analizamos la divisibilidad entre 5:**

$9672 = 967\times\underbrace{10}_{\overset{\circ}{5}} + 2$

$9672 = \overset{\circ}{5} + 2$

10 es múltiplo de 5, por consiguiente 967×10 es múltiplo de 5.

Cuando se empaquete de 5 en 5 va a sobrar 2.

∴ Sobra 2 en caso de que empaquete de 5 en 5.

***Ejemplo 1***

**Llena** la tabla con el resto de dividir los números entre los módulos.

| Número | 2 379 | | | 256 986 | | | 374 648 | | | 854 937 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Módulo | 2 | 4 | 8 | 2 | 4 | 8 | 2 | 4 | 8 | 2 | 4 | 8 |
| Resto | | | | | | | | | | | | |

**Ten en cuenta**

**1.** Divisibilidad por 2:

$\overline{abc} = \underbrace{\overline{ab0}}_{\overset{\circ}{2}} + c$

Para que un número sea divisible por 2, su última cifra debe ser par. En caso contrario, el residuo de dividirlo entre 2 es 1.

**2.** Divisibilidad por 4:

$\overline{abc} = \underbrace{\overline{a00}}_{\overset{\circ}{4}} + \overline{bc}$

Para que un número sea divisible por 4, el número formado por sus 2 últimas cifras debe ser múltiplo de 4. En caso contrario, este número determina el resto de dividirlo entre 4.

**3.** Divisibilidad por 8:

$\overline{abcd} = \underbrace{\overline{a000}}_{\overset{\circ}{8}} + \overline{bcd}$

Para que un número sea divisible por 8, el número formado por sus 3 últimas cifras debe ser múltiplo de 8. En caso contrario, este número determina el resto de dividirlo entre 8.

### *Ejemplo 2*

El teniente Medina tiene 154 soldados, el alférez Choque, 146 y el capitán Solano, 156 soldados. ¿Cuál de ellos puede hacer que sus soldados formen en 4 columnas de igual número de filas?

**Resolviendo:**

Para el objetivo el número de soldados debe ser múltiplo de 4:

**Tnte. Medina**

$154 = \overset{\circ}{4} + 54$

| 54 | 4 |
|---|---|
| 52 | 13 |
| 2 | |

$\Rightarrow 154 = \overset{\circ}{4} + 2$

**Alf. Choque**

$146 = \overset{\circ}{4} + 46$

| 46 | 4 |
|---|---|
| 44 | 11 |
| 2 | |

$\Rightarrow 146 = \overset{\circ}{4} + 2$

**Cap. Solano**

$156 = \overset{\circ}{4} + 56$

| 56 | 4 |
|---|---|
| 56 | 14 |
| - | - |

$\Rightarrow 156 = \overset{\circ}{4}$

$\therefore$ Solo el Cap. Solano puede formar 4 columnas con sus soldados.

### *Ejemplo 3*

**Llena** la tabla con el resto de dividir los números entre los módulo.

| Número | 2 379 | | 357 280 | | 214 759 | | 371 380 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Módulo | 5 | 25 | 5 | 25 | 25 | 125 | 25 | 125 |
| Resto | | | | | | | | |

### *Ejemplo 4*

En el almacén de una fábrica de cemento se contó $\overline{275a}$ bolsas de cemento. La última cifra de la anotación no es legible, pero el encargado recuerda que contó de 8 en 8 y sobró 7. ¿Cuántas bolsas había?

**Resolviendo:**

$\overline{275a} = \overset{\circ}{8} + 7 \Rightarrow \overline{75a} = \overset{\circ}{8} + 7$

| 75a | 8 |
|---|---|
| 72 | 94 |
| 3a | |
| 32 | |
| 7 | |

$\Rightarrow 275 = \overset{\circ}{8}$

$a = 9$

$\therefore$ Contó 2759 bolsas

**Ten en cuenta**

**4.** Divisibilidad por 5:

$$\overline{abc} = \underbrace{\overline{ab0}}_{\overset{\circ}{5}} + c$$

Para que un número sea divisible por 5, su última cifra debe terminar en 0 o 5, en caso contrario esta cifra determina el resto de dividirlo entre 5.

**5.** Divisibilidad por 25:

$$\overline{abc} = \underbrace{\overline{a00}}_{\overset{\circ}{25}} + \overline{bc}$$

Para que un número sea divisible por 25, el número formado por sus 2 últimas cifras debe ser múltiplo de 25, en caso contrario este número determina el resto de dividirlo entre 25.

**6.** Divisibilidad por 125:

$$\overline{abcd} = \underbrace{\overline{a000}}_{\overset{\circ}{125}} + \overline{bcd}$$

Para que un número sea divisible por 125, el número formado por sus 3 últimas cifras debe ser múltiplo de 125, en caso contrario este número determina el resto de dividirlo entre 125.

Resuelve problemas de cantidad (Aritmética)

## Nivel básico

**1** En cuánto debe aumentar como mínimo el número 23 747 para que sea:

a) Múltiplo de 4 b) Múltiplo de 8

**2** En cuánto debe disminuir como mínimo el número 72 493 para que sea:

a) Divisible entre 25 b) Divisible entre 125

**3** Si efectúo 57948 + 2374×6857 y el resultado lo divido entre 5, ¿cuánto de residuo obtengo?

**4** Al efectuar 1234 + 567×890 y dividir el resultado entre 25, el residuo resulta:

**5** ¿Cuál es la suma de los residuos que se obtienen al dividir 31214, 31215 y 31216 entre 4; 5 y 8, respectivamente?

## Nivel intermedio

**6** Con las cifras del 1 al 5, **forma** el mayor número múltiplo de 4.

**7** **Halla** $a + b$ para que $\overline{(b+3)4ab(a+1)}$ sea múltiplo de 25.

**8** Si $\overline{m45(m+3)} = \overset{\circ}{5}$ y $\overline{mn} = \overset{\circ}{4}$, **calcula** el máximo valor de $m + n$.

**9** ¿Cuántos múltiplos de 8, de 4 cifras diferentes, se pueden formar con las cifras 2; 3; 4 y 5?

**10** Alonso quiere formar un número múltiplo de 8 con las cartillas mostradas. Con ese fin intercambia de posición dos cartillas. ¿Cuáles son esas cartillas?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 8 | 6 | 3 |

## Nivel avanzado

**11** Si $\overline{a39(a+1)} = \overset{\circ}{5}$ y $\overline{ab} = \overset{\circ}{4}$, **calcula** el menor valor de $a + b$.

**12** Hay que intercambiar entre ellas las cifras pares y del mismo modo las cifras impares.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 5 | 6 | 3 |

¿Cuáles cifras se deben intercambiar para que el número sea un número $\overset{\circ}{4}0$ más 5?

**13** Con las cifras pares se forma el mayor número de cifras diferentes múltiplo de 8. Si de dicho número borramos las cifras extremas, ¿qué residuo se obtiene al dividir entre 25 el número que queda?

**14** ¿Cuántos valores puede tomar $a$ en $\overline{27a5}$ para que al dividirlo entre 8 dé 7 de residuo?

Resuelve problemas de cantidad (Aritmética)

## Tarea

**1** Con las cifras 2; 3; 5 y 7, **forma** el mayor número múltiplo de 8.

**2** **Efectúa** $357 \times 753 + 462 \times 264$ y **determina** qué residuo deja al dividirlo entre 25.

**3** Sabiendo que el número $\overline{a456a}$ es divisible entre 5 y que $\overline{78aab}$ es divisible entre 8, **halla** "$b$".

**4** ¿Por qué cifras podemos reemplazar la cifra 3 de 28 534 para que sea divisible entre 8?

# Criterios de divisibilidad II

Principios de divisibilidad

Mateo compra pollos en la granja para comercializarlos en la ciudad. Los transporta en jabas del mismo tamaño.

Dispone de jabas de 9; 11; y 15 pollos y procura que no sobren ni falten pollos a la hora de acomodarlos en las jabas.

VIDEO DE TEORÍA

**Responde:**

Un día compró 1 425 pollos. ¿Jabas de qué capacidad debe escoger para transportar los pollos? _____

En este capítulo vamos a analizar las condiciones que debe reunir un número para ser divisible entre **3; 9; 11; 7 y 13.**

**Resolviendo:** (Problema introductorio)

Debe escoger jabas cuya capacidad sea un divisor de 1 425.

- **Analizamos la divisibilidad entre 9:**

$$1425 = 1000 + 4\times100 + 2\times10 + 5$$
$$= (999 + 1) + 4(99 + 1) + 2(9 + 1) + 5$$
$$= \overset{\circ}{9} + 1 + \overset{\circ}{9} + 4 + \overset{\circ}{9} + 2 + 5$$
$$= \overset{\circ}{9} + \underbrace{(1 + 4 + 2 + 5)}_{\text{Suma de cifras de 1425}} = \overset{\circ}{9} + \underbrace{12}_{\overset{\circ}{9}+3} = \overset{\circ}{9} + 3$$

Para que un número sea divisible entre 9 depende de la suma de sus cifras. Si dicha suma es múltiplo de 9, también lo es el número, en caso contrario la suma de cifras determina el resto de dividir entre 9.

$\Rightarrow$ 1425 no es divisible entre 9. Sobrarían 3 pollos.

- **Analizamos la divisibilidad entre 11:**

$$1425 = 1000 + 4\times100 + 2\times10 + 5$$
$$= (\underbrace{1001}_{\overset{\circ}{11}} - 1) + 4(\underbrace{99}_{\overset{\circ}{11}} + 1) + 2(\underbrace{11}_{\overset{\circ}{11}} - 1) + 5$$
$$= \overset{\circ}{11} - 1 + \overset{\circ}{11} + 4 + \overset{\circ}{11} - 2 + 5$$
$$= \overset{\circ}{11} + (-1 + 4 - 2 + 5) = \overset{\circ}{11} + 6$$

Para que un número sea divisible entre 11 la suma de cifras de orden impar menos la suma de cifras de orden par debe ser múltiplo de 11, en caso contrario esta diferencia determina el resto de dividir entre 11.

$\Rightarrow$ 1425 no es divisible entre 9. Sobrarían 3 pollos.

- **Analizamos la divisibilidad entre 15:**

Para que 1425 sea divisible entre 15, debe ser múltiplo de 3 y de 5. Es $\overset{\circ}{9} + 3 = \overset{\circ}{3}$ y es $\overset{\circ}{5}$ porque termina en 5.

$\therefore$ Debe escoger las jabas de 15 pollos.

**Ten en cuenta**

**1.** Divisibilidad por 9:

$$\overline{abc} = \underbrace{100}_{\overset{\circ}{9}+1}a + \underbrace{10}_{\overset{\circ}{9}+1}b + c$$
$$\overline{abc} = \overset{\circ}{9} + (a + b + c)$$

Para que un número sea divisible por 9, la suma de sus cifras debe ser múltiplo de 9. En caso contrario dicha suma determina el resto de dividirlo entre 9.

**2.** Divisibilidad por 3:

Dado que todo número divisible por 9 también lo es por 3, el criterio de divisibilidad por 9 también se aplica para 3.

**3.** Divisibilidad por 11:

$$\overline{abc} = \underbrace{100}_{\overset{\circ}{11}+1}a + \underbrace{10}_{\overset{\circ}{11}-1}b + c$$
$$\overline{abc} = \overset{\circ}{11} + (a - b + c)$$

Para que un número sea divisible por 11, la suma de cifras de orden impar menos la suma de cifras de orden par debe se múltiplo de 11. En caso contrario esta diferencia determina el resto de dividirlo entre 11.

**Forma práctica:** $\overset{-+-+}{abcd}$

Resuelve problemas de cantidad (Aritmética)

### *Ejemplo 1*

**Llena** la tabla con el resto de dividir el número entre el módulo.

| Número | 2 673 | | | 257 424 | | | 523 527 | | | 264 837 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Módulo | 3 | 9 | 11 | 3 | 9 | 11 | 3 | 9 | 11 | 3 | 9 | 11 |
| Resto | | | | | | | | | | | | |

### *Ejemplo 2*

La profesora le pidió a Manuel que escriba un número múltiplo de 7, un segundo número múltiplo de 13 y un tercer número múltiplo de 21. Manuel escribió los números 245 879; 268 038 y 213 045. ¿Están correctos los números?

**Resolviendo:**

- $2\ 4\ 5\ 8\ 7\ 9 = \overset{\circ}{7} - 4 - 12 - 5 + 16 + 21 + 9$

  $-2\ -3\ -1\ 2\ 3\ 1$

  $= \overset{\circ}{7} - \cancel{21} + \cancel{21} + \underbrace{25}_{\overset{\circ}{7}+4} = \overset{\circ}{7} + 4$ ← No es múltiplo de 7

- $2\ 6\ 8\ 0\ 3\ 8 = \overset{\circ}{13} + 8 + 18 - \cancel{8} - 9 + \cancel{8}$

  $4\ \ 3\ -1\ -4\ -3\ 1$

  $= \overset{\circ}{13} + 17 = \overset{\circ}{13} + 4$ ← No es múltiplo de 13

- $2\ 1\ 3\ 0\ 4\ 5 =$

  $-2\ -3\ -1\ 2\ 3\ 1$

  $2 + 1 + 3 + 4 + 5 = 15 = \overset{\circ}{3}$

  $-4 - 3 - 3 + 12 + 5 = 7 = \overset{\circ}{7}$

  } 213 045 es Múltiplo de 21

$\therefore$ Solo 213 045 es correcto.

### *Ejemplo 3*

**Llena** la tabla con el resto de dividir los números entre los módulos.

| Número | 2 019 | | 300 129 | | 210 158 | | 321 029 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Módulo | 7 | 13 | 7 | 13 | 7 | 13 | 7 | 13 |
| Resto | | | | | | | | |

## Nivel básico

**1** En cuánto debe aumentar como mínimo el número 35 286 para que sea:

a) Múltiplo de 9 b) Múltiplo de 11

**2** En cuánto debe aumentar o disminuir como mínimo el número 32 467 para que sea:

a) Divisible entre 11 b) Divisible entre 7

## Ten en cuenta

**4.** Divisibilidad por 7:

Para que un número sea divisible por 7, la suma algebraica de sus cifras multiplicadas, de derecha a izquierda, por:

1; 3; 2; −1; −3; −2; 1; 3; 2; ...

debe ser múltiplo de 7. En caso contrario dicha suma determina el resto de dividir el número entre 7.

**5.** Divisibilidad por 13:

Para que un número sea divisible por 13, la suma algebraica de sus cifras multiplicadas, de derecha a izquierda, por:

1; −3; −4; −1; 3; 4; 1; −3; ...

debe ser múltiplo de 13. En caso contrario dicha suma determina el resto de dividir el número entre 13.

**6.** Divisibilidad por números compuestos:

Para que un número sea divisible por un módulo compuesto, debe ser divisible entre cada uno de sus factores.

Por ejemplo, para que un número sea divisible por 20, debe ser divisible por 4 y 5 y, lógicamente, tambien por cada uno de los divisores de 20.

**3** ¿Por qué cifra se debe sustituir la cifra 7 de 235 178 para que sea múltiplo de 9?

**4** **Califica** como verdadero (V) o falso (F) las siguientes proposiciones:

a) Todo número divisible por 9 es divisible por 3. ( )

b) Todo número divisible por 3 es divisible por 9. ( )

c) Si un número es divisible por 22 entonces es divisible por 11. ( )

**5** El número 29 628 se convierte en múltiplo de 11:

I. Sumándole 6

II. Restándole 5

III. Sumándole 50

## Nivel intermedio

**6** Si $\overline{5abb3}$ es divisible entre 99, **halla** $a \times b$.

**7** Con cuatro de las cinco cifras 5; 6; 7; 8 y 9, **forma** el mayor número divisible por 9 y por 4.

**8** Si el número del celular de Rossy es $\overline{a(4b)(3b)b31a5b}$ y es múltiplo de 36, ¿qué residuo da al dividirlo entre 11?

**9** Si el número $\overline{2x55y}$ es divisible por 72, **determina** la diferencia entre $x$ e $y$.

**10** ¿Por qué cifras debemos reemplazar las cifras 5 y 6 del número 9506 para que resulte múltiplo de 7 y de 11?

## Nivel avanzado

**11** Todo número de la forma $\overline{aa}$ es múltiplo de 11. Escribe todas las formas que puede tener un número de 4 cifras para que sea múltiplo de 11.

**12** Con las cifras $a$, $b$, $c$ y $d$ se escribe un número de 4 cifras y resulta múltiplo de 9. Entonces el número es:

A) $\overline{abcd}$ B) $\overline{acdb}$ C) $\overline{cdba}$

D) $\overline{dacb}$ E) Cualquiera de las anteriores

**13** De las proposiciones:

I. Todo número capicúa es múltiplo de 11.

II. Cualquier número capicúa de 4 cifras es múltiplo de 11.

III. Todo número de 6 cifras iguales es múltiplo de 7 y de 13.

Son verdaderas:

**14** A un número de 5 cifras se le resta la suma de sus cifras, al resultado se le tacha una cifra y se suma las cifras restantes. Si esta suma resulta 20, entonces la cifra tachada es:

## Tarea

**1** ¿Cuántos elementos de

A = {2435; 6789; 12342; 3729}

son múltiplos de 11?

**2** Si el numeral $\overline{24ab51}$ es múltiplo de 99, ¿qué residuo arroja al dividirlo entre 7?

**3** Si se multiplica $\overline{aba}$ por 7, resulta $\overline{cc79}$. ¿Qué resto deja $\overline{abc}$ al dividirlo entre 13?

**4** Existe un solo número de 5 cifras de la forma $\overline{xx25y}$ que es divisible por 72. ¿Qué residuo dejará dicho número al dividirlo entre 11?

# Reforzando - Unidad 3

## Olimpiadas nacionales e internacionales

**1** En la siguiente secuencia hay dos números intrusos. Identifícalos y señala la suma.

15; 20; 10; 45; 18; 25; 60; 12; 35

A) 20 B) 15 C) 30 D) 35

**2** Se ha encuestado a 120 personas formulándoles una sola pregunta. Las respuestas fueron enumeradas del 1 al 120 y para analizarlas se tomaron solo las que tienen numeración múltiplo de 7. ¿Cuántas respuestas fueron analizadas?

A) 15 B) 17 C) 30 D) 18

**3** Aldo y Maritza se pusieron a contar los números múltiplos de 3 y de 4, respectivamente, hasta completar cada uno 20 números. Si partieron de 3 y 4, respectivamente, ¿en qué número se detuvo cada uno? Indique la suma.

A) 150 B) 170 C) 130 D) 140

**4** Un número que termina en 6:

I. Siempre es múltiplo de 4.

II. Es múltiplo de 4 siempre que su cifra de segundo orden sea impar.

III. Es múltiplo de 4 siempre que su cifra de segundo orden sea par.

Es verdadero:

A) Solo I B) Solo II C) Solo III D) I y II

**5** Califica como verdadero (V) o falso (F) las siguientes proposiciones.

a) Todos los números que terminan en 3 son múltiplos de 3.

b) Un número múltiplo de 5 termina en cero o cinco.

c) El número 1854 es múltiplo de 9.

A) FVF B) VVF C) FFV D) FVV

**6** Tomás, Laureano y Joaquín son trillizos. Su hermano Pablo es 3 años mayor que ellos. ¿Cuál de las siguientes puede ser la suma de las edades de los cuatro?

A) 27 B) 28 C) 29
D) 30 E) 40

**7** El número 2683 es múltiplo de 9 siempre que la cifra 8 se cambie por:

A) 6 B) 9 C) 5 D) 7

**8** Eloy escribe todos los múltiplos de 3, desde 3, excepto cuando llega a un múltiplo de 4. Si escribió en total 15 números, ¿cuál fue el último?

A) 57 B) 60 C) 45 D) 48

**9** Si continúas la siguiente secuencia, ¿qué figura le corresponde al número 20?

A) B) C)

D) E)

**10** El número natural más pequeño tal que al dividirlo por 3 deja residuo 2, y al dividirlo por 11 deja residuo 7 es:

A) 18 B) 23 C) 29
D) 32 E) 50

**11** César, Omar, Renzo y Renato visitan a Katy cada 12; 9; 8 y 6 días, respectivamente. ¿Cuántas veces como máximo la visitarán todos juntos en un año?

A) 3 B) 4 C) 7 D) 6

**12** ¿Cuál de los siguientes números no puede ser jamás múltiplo de 11?

A) $\overline{abba}$ B) $\overline{aba}$ C) $\overline{2aa}$ D) $\overline{5bc}$

**13** Juan va a repartir, en partes iguales, 876 trompos entre sus 9 sobrinos. Si no quiere que le falte ni le sobre ningún trompo, ¿cuál es el menor número de trompos que debe agregar a los que ya tiene?

A) 6 B) 7 C) 5 D) 8

**14** Hoy es sábado. Dentro de 25 días es mi cumpleaños. ¿Qué día de la semana cae mi cumpleaños?

A) Miércoles B) Jueves
C) Viernes D) Martes

**15** Si el número $\overline{abcd}$ es múltiplo de 9, podemos asegurar que:

I. $\overline{dcba}$ es múltiplo de 9
II. $\overline{abc}$ no es múltiplo de 9
III. $\overline{bcd}$ es múltiplo de 9

A) Solo I B) Solo II
C) Solo III D) I y II

**16** Calcula el menor numeral de 4 cifras divisible por 37, que al ser dividido entre 27 deje residuo 21. Dar la suma de sus cifras.

A) 18 B) 29 C) 21 D) 30

**17** Una persona adquirió 23 tarjetas de navidad por 175 soles, unas de 2 soles, otras de 8 soles y algunas de 11 soles. Hallar el número máximo de tarjetas de 8 soles.

A) 14 B) 16 C) 18 D) 20

**18** Si $\overline{13a2ba}$ es divisible entre 63, ¿cuál es la suma de todos los posibles valores de $a$ y $b$?

A) 14 B) 16 C) 18 D) 20

**19** Un almacenero cuenta las tuercas de los motores: si las cuenta de 5 en 5; 7 en 7; 9 en 9 y 11 en 11, resulta un residuo máximo. Si cada tuerca cuesta 30 céntimos y la empresa gastó entre 1200 y 2600 soles, el número de tuercas que hay en el almacén es:

A) 3469 B) 6829 C) 6929 D) 6934

**20** Se tienen las siguientes fichas. 1 9 6 8 2

Agrupando las fichas de dos en dos:

¿Cuántos números múltiplos de 3 se pueden formar? Escríbelos.

¿Cuántos números múltiplos de 4 se pueden formar? Escríbelos.

¿Cuántos números pares se pueden formar? Escríbelos.

**21** Entre los múltiplos de 3 comprendidos entre 4 y 401, ¿cuántos múltiplos de 5 hay?

**22** Un padre y un hijo son marineros. Salen juntos, pero en diferentes barcos, el primer día que el hijo se hace a la mar. El padre vuelve a casa cada 20 días y el hijo lo hace cada 15 días.

¿Cada cuánto tiempo coinciden en casa?

**23** José trabaja 10 días seguidos y descansa 4 días. El primero de agosto se reincorporó al trabajo. El 30 de noviembre, ¿estará trabajando o descansando?

**24** ¿Cuántos números de tres cifras que terminan en 7 son múltiplos de 7?

**25** Joaquín escribe todos los números múltiplos de 8 que terminan en 2 y se detiene al escribir el último número de 3 cifras de la secuencia. ¿Cuántos números escribió?

**26** Tres amigos se ubican en una fila. El primero dice 3, el segundo dice 6, el tercero dice 9, el primero dice 12 y siguen contando de 3 en 3. Carlos dice 27, Diego, 75 y Ana, 42. ¿Quién dice 2013 si siguen contando en el mismo orden?

**27** Si subo de dos en dos escalones las escaleras de mi piso me sobra un escalón. Si subo de tres en tres, me sobran dos y si subo de cuatro en cuatro me sobran tres. Si son menos de 20, ¿cuántos escalones tiene la escalera de mi piso?

# Autoevaluación

**1** ¿Cuál es el mayor número de 4 cifras múltiplo de 11 que se puede formar con las cifras 4; 6; 7 y 9?

**2** Hay números, como 360, que al dividirlos por 23 dan un cociente igual al residuo.

(360 ÷ 23 tiene cociente 15 y residuo 15). Busca todos los números menores que 100 con esta propiedad.

**3** ¿Cuál de los siguientes números no puede ser la suma de tres números consecutivos y por qué?

A) 347 B) 987 C) 12345 D) 777

**4** Mariela distribuye sus fichas numeradas siguiendo el siguiente patrón.

Determina el color de las fichas 123 y 246. Explica tu respuesta.

**5** Con las cifras 2; 3; 5; 6; 7 y 8, y sin repetir, se quiere formar números múltiplos de 9. Cuando se forma el mayor número posible, ¿qué cifra o cifras no intervienen? Argumenta.

**6** Si el número $\overline{abcd}$ es múltiplo de 9, podemos asegurar que $\overline{abc}$ es múltiplo de 9 siempre que:

I. $d = 9$ II. $d = 0$

III. $d$ tome cualquier valor.

# 4 Propiedades de los números

Los números naturales pueden ser primos o compuestos, lo cual determina la cantidad de sus divisores. Al elaborar la lista de los divisores o múltiplos, encontraremos que estos tienen elementos comunes.

## Tenemos derecho a ser escuchados

El derecho de los niños y adolescentes a ser escuchados, es decir, a opinar libremente, está establecido en la Convención sobre los Derechos del Niño (CDN) de 1989, ratificada por nuestro país en 1990. Expresado en el Art. 12, sostiene que los Estados parte "garantizarán al niño que esté en condiciones de formarse un juicio propio el derecho de expresar su opinión libremente en todos los asuntos que afectan al niño, teniéndose debidamente en cuenta las opiniones del niño, en función de la edad y madurez del niño".

| Resuelve problemas de cantidad (Aritmética) | |
|---|---|
| **Capacidades** | **Desempeños** |
| **Traduce cantidades a expresiones numéricas** | Define los números primos y compuestos. |
| **Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones** | Comprende la importancia del Teorema fundamental de la Aritmética. |
| **Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo** | Aplica la descomposición canónica en el cálculo del MCD y el MCM. Resuelve problemas de MCD y MCM. |
| **Argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones** | Demuestra las propiedades del MCD y el MCM. |

# Números primos

Divisores

Andrea quiere ser entomóloga y ha encontrado que las cigarras periódicas, muy especialmente la Magicicada septendecim, tienen el ciclo vital más largo de todos los insectos, 17 años; mientras que sus depredadores tienen un ciclo de vida de 2 años.

Estas cigarras se desarrollan bajo tierra y cada 17 años emergen de ella unas semanas, después se aparean, ponen los huevos y mueren.

VIDEO DE TEORÍA

**Responde:**

**1.** ¿Por qué tiene el periodo de vida de 17 años?

**2.** ¿Cada cuántos años coincide con sus depredadores?

Un **número es primo o primo absoluto** si tiene exactamente dos divisores, la unidad y sí mismo. La unidad no es primo por tener un solo divisor, sí mismo. Los primeros números primos son:

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 61; ...

Los números con más de dos divisores se llaman **compuestos.**

***Ejemplo 1***

**Escribe** los divisores de los números, cuantifícalos y define si es primo o compuesto:

| N | Divisores | DN | N es |
|---|---|---|---|
| 12 | | | |
| 7 | | | |
| 20 | | | |
| 19 | | | |

**DN:** Cantidad de divisores de N.

## Números primos entre sí (PESI)

Los números PESI, o primos relativos, son los que comparten como único divisor común a la unidad. Por ejemplo, 4 y 9 son PESI porque los divisores de 4 son 1; 2 y 4; los de 9 son 1; 3 y 9. El único número que aparece como divisor de ambos es 1.

Los números 10 y 14 no son PESI, porque aparte de 1 tienen a 2 como divisor común.

***Ejemplo 2***

En el recuadro **escribe** SÍ si son PESI y No, en caso contrario.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12 y 15 | | 16 y 21 | |
| 15 y 35 | | 33 y 40 | |

**Ten en cuenta**

- La unidad es un divisor universal porque divide a todo número.
- El único primo par es el 2.
- Los únicos primos consecutivos son el 2 y el 3.
- Los números primos mayores que 5 son impares y terminan en la cifra 1; 3; ó 7.
- Una gran cantidad de números primos son de la forma: $6n + 1$

Si $n = 1$

$\rightarrow 6(1) + 1 = 6 + 1 = 7$

Si $n = 2$

$\rightarrow 6(2) + 1 = 12 + 1 = 13$

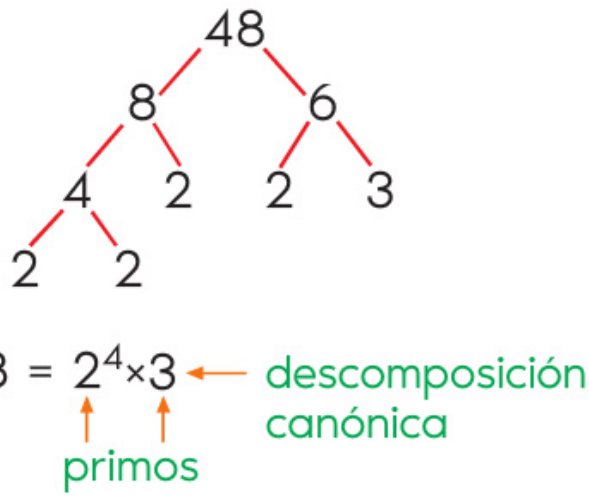
Si $n = 3$

$\rightarrow 6(3) + 1 = 18 + 1 = 19$

## Descomposición canónica

Los números primos forma la arquitectura de los números.

Todo número mayor que 1 se descompone como el producto de factores primos elevados a exponentes naturales. Esta descomposición es única y se llama **descomposición canónica.**




Veamos algunos ejemplos:

- 60 | 2
  30 | 2
  15 | 3
  5 | 5
  1 |

  ⇒ $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

- 100 | 2
  50 | 2
  25 | 5
  5 | 5
  1 |

  ⇒ $100 = 2^2 \times 5^2$

- 150 | 2
  75 | 3
  25 | 5
  5 | 5
  1 |

  ⇒ $150 = 2 \times 3 \times 5^2$

**Ten en cuenta**

Es descomposición canónica cuando las bases son números primos.

$2^3 \times 3^2$ es descomposición canónica de 72.

En cambio $4^2 \times 3^2$ no es descomposición canónica porque 4 no es primo.

### *Ejemplo 3*

**Rellena** la tabla con la descomposición canónica correspondiente.

| N | Desc. canónica |
|---|---|
| 84 | |
| 120 | |
| 144 | |

| N | Desc. canónica |
|---|---|
| 180 | |
| 240 | |
| 840 | |

## Tabla de divisores

Los divisores se generan por la combinación de los divisores primos y sus potencias. Un modo práctico de encontrarlos es elaborando una tabla. Observa los ejemplos:

- $45 = 3^2 \times 5$

  Divisores de 45

  1 1
  3 5
  9

  ×5 → 1 3 9 / 5 15 45

- $72 = 2^3 \times 3^2$

  Divisores de 72

  1 1
  2 3
  4 9
  8

  ×3 → 1 2 4 8 / 3 6 12 24

  ×9 → 9 18 36 72

### *Ejemplo 4*

¿Cuántos divisores de 200 son de dos cifras?

### *Ejemplo 5*

¿Cuántos divisores de 288 terminan en cifra 4?

## Cantidad de divisores (DN)

Observa estas dos tablas. La cantidad de divisores está dada por el producto de los consecutivos de los exponentes de los divisores primos de la descomposición canónica.

• $45 = 3^2 \times 5^1$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 9 | 1 + 1 |
| 5 | 15 | 45 | |
| | | | 2 + 1 |

D45 = 3×2 = 6

• $72 = 2^3 \times 3^2$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 | 8 | 2 + 1 |
| 3 | 6 | 12 | 24 | |
| 9 | 18 | 36 | 72 | |
| | | | | 3 + 1 |

D72 = 4×3 = 12

Por ejemplo, en $N = 2^4 \times 3^2 \times 5$ los exponentes de las bases son 4; 2 y 1, cuyos respectivos consecutivos son 5; 3 y 2. Por lo tanto, la cantidad de divisores de N es: DN = 5×3×2 = 30.

### *Ejemplo 6*

**Completa** la tabla con la cantidad de divisores para cada número.

| N | 12 | 36 | 60 | 72 | 84 | 96 | 120 | 150 | 350 | 700 | 840 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DN | | | | | | | | | | | |

### Nivel básico

**1** Con relación a los números primos:

I. Los mayores que 5 terminan en 3; 7 o 9.
II. Todos son impares.
III. La suma de dos números primos siempre es par.

Son verdaderas:

**2** De las proposiciones:

I. 18 y 35 son primos entre sí.
II. Dos números consecutivos siempre son primos entre sí.
III. Dos números impares siempre son primos entre sí.

Son verdaderas:

**3** ¿Cuántos números primos hay entre 20 y 40?

**4** ¿Cuánto hay que sumarle a 20 para que sea un número primo?

**5** ¿Cuáles son los dos números primos que suman 31?

**8** ¿Cuántos números menores que 60 no lo dividen exactamente a éste?

## Nivel intermedio

**6** ¿En cuánto aumentan los divisores de 600 cuando se le multiplica por 7?

**9** ¿Cuántos divisores de 270 tienen dos cifras?

**7** ¿En cuánto aumenta la cantidad de divisores de 650 cuando se le multiplica por 13?

**10** ¿Cuántos números de dos cifras que terminan en 7 son primos absolutos?





GENIOMATIC

## Nivel avanzado

**11** ¿Cuántos números compuestos hay entre 509 y el siguiente primo?

**12** Me han ofrecido un terreno de forma rectangular de 600 $m^2$ de área. Sus dimensiones son números enteros de metros pero ninguno es 1 m. ¿Cuántos terrenos cumplen con esta condición?

**13** Elizabeth juega con el número 20, sumándole opcionalmente 3 o 4. ¿Cuál es la forma de llegar más fácilmente de este modo a un número primo por tercera vez?

**14** ¿Cuáles son los números cuadrados consecutivos más pequeños tal que entre ellos hay 4 números primos?



## Tarea

**1** Si $\overline{a1}$; $\overline{a3}$; $\overline{a7}$ y $\overline{a9}$ son primos absolutos, ¿cuál es el valor de $a$?

**2** ¿Cuántos números primos hay entre 40 y 60?

**3** **Halla** la cantidad de divisores de 5000.

**4** ¿En cuánto disminuye la cantidad de divisores de 4800 cuando se le divide entre 6?

Divisibilidad y números primos

# MCD Y MCM
## Métodos de obtención

Don Mauricio tiene una huerta de mandarinas. Luego de cosechar ha separado las frutas en dos tamaños. De las grandes tiene 700 mandarinas y de las chicas, 720.

Las quiere vender en bolsas que contengan el mismo número de mandarinas.

VIDEO DE TEORÍA

**Responde:**

Si no quiere que sobre ni falte mandarinas a la hora de embolsar, ¿cuántas mandarinas debe poner como máximo en cada bolsa?



| Divisores | Número | Múltiplos positivos |
|---|---|---|
| 1 2 4 | 4 | 4 8 12 16 20 24 28 ... |
| 1 2 3 6 | 6 | 6 12 18 24 30 36 ... |

divisores comunes; mayor (MCD); menor (MCM); múltiplos comunes

MCD(4; 6) = 2

MCM(4; 6) = 12

**Máximo común divisor (MCD)**
El máximo común divisor de dos o más números es el mayor de los divisores comunes.

**Mínimo común múltiplo (MCM)**
El mínimo común múltiplo de dos o más números es el menor de los múltiplos comunes.

**Completa** las tablas:

| Números | MCD | MCM |
|---|---|---|
| 6; 8 | | |
| 12; 8 | | |
| 10; 15 | | |

| Números | MCD | MCM |
|---|---|---|
| 6; 8; 12 | | |
| 12; 20: 24 | | |
| 20; 15; 30 | | |

**Resolviendo:** (Problema introductorio)

La cantidad de mandarinas de cada bolsa debe ser divisor de 700 y 720, y el mayor posible, o sea, MCD(700; 720).

700 = 20×35
720 = 20×36
} El mayor divisor común es 20, entonces: MCD(700; 720) = 20

∴ En cada bolsa deben ir 20 mandarinas.

**Ten en cuenta**

El MCD de dos números es igual al MCD del menor y la diferencia entre los mismos.

Por ejemplo, para calcular el MCD de 60 y 36 hallamos la diferencia 60 – 36 = 24.

Ahora calculamos el MCD de 36 y 24.

Para calcular el MCD de 36 y 24 hallamos la diferencia 36 – 24 = 12.

Ahora calculamos el MCD de 24 y 12:

∴ MCD(24; 12) = 12
MCD(60; 36) = 12

Otra estrategia para calcular el MCD y el MCM es dividir los números entre un factor común, calcular el MCD o MCM de los cocientes y multiplicar por el factor común por el que se dividió.

Por ejemplo, para calcular el MCD y MCM de 40 y 60, dividimos a ambos entre 10:

MCD(4; 6) = 2

MCM(4; 6) = 12

∴ MCD(40; 60) = 20
MCM(40; 60) = 120

## Métodos de cálculo del MCD y MCM

Cuando los números son pequeños, el MCD y el MCM de los mismos los podemos calcular mentalmente, pero cuando son números grandes hay que utilizar una técnica de cálculo.

Hay varios métodos para obtener el MCM y MCD. Veamos a continuación:

### A. Por descomposición simultánea

Hallemos el MCD y MCM de 24; 36 y 30:

| | 24 | 36 | 60 | |
|---|---|---|---|---|
| | 12 | 18 | 30 | 2 |
| | 6 | 9 | 15 | 2 |
| PESI | 2 | 3 | 5 | 3 |
| | 1 | 3 | 5 | 2 |
| | 1 | 1 | 5 | 3 |
| | 1 | 1 | 1 | 5 |

MCD = 2×2×3 = 12

MCM = 2×2×3×2×3×5 = 360

Se van extrayendo los divisores comunes de los números hasta que resulten PESI.

**El MCD es el producto de los divisores comunes ya extraídos.**

Se continúa extrayendo los divisores no comunes hasta que resulten en 1.

**El MCM es el producto de los divisores comunes y no comunes extraídos.**

### B. Por descomposición canónica

Hallemos el MCD y MCM de 120; 132 y 252.

Descomponemos canónicamente los números:

| 120 | 2 |
|---|---|
| 60 | 2 |
| 30 | 2 |
| 15 | 3 |
| 5 | 5 |
| 1 | |

$120 = 2^3 \times 3 \times 5$

| 132 | 2 |
|---|---|
| 66 | 2 |
| 33 | 3 |
| 11 | 11 |
| 1 | |

$132 = 2^2 \times 3 \times 11$

| 252 | 2 |
|---|---|
| 126 | 2 |
| 63 | 3 |
| 21 | 3 |
| 7 | 7 |
| 1 | |

$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$

**El MCD es el producto de los factores primos comunes elevados a su menor exponente:** ➡ $MCD = 2^2 \times 3 = 12$

**El MCM es el producto de los factores primos comunes y no comunes elevados a su mayor exponente:** ➡ $MCM = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 = 27\,720$

**Ten en cuenta**

**Términos para designar múltiplos y divisores**

Para expresar que un número es divisor de otro se suele decir que está contenido.

Por ejemplo, 6 está contenido en 30, que equivale a decir que 6 es divisor de 30.

Del múltiplo se dice que contiene.

Por ejemplo, 30 contiene a 6; lo que quiere decir que 30 es múltiplo de 6.

Por lo tanto, usando estos términos, el MCD es el mayor número contenido y el MCM, el menor número que contiene.

El mayor número contenido en 12 y 18 es 6, esto es, MCD(12; 18) = 6.

El menor número que contiene a 20 y a 30 es 60; que es equivalente a: MCM(20; 30) = 60.

## Nivel básico

**1** En cada recuadro, **escribe** los signos >, < o =, según corresponda.

a) MCD(12; 15) ☐ MCD(18; 10)

b) MCD(28; 35) ☐ MCD(25; 45)

c) MCM(15; 18) ☐ MCM(21; 15)

**2** De las proposiciones, **identifica** las que son verdaderas

I. El MCM de dos números puede ser igual a uno de ellos.

II. El MCD de dos números diferentes siempre es menor que el MCM.

III. El MCM de dos números, uno par y otro impar, es par.

**3** El inspector de educación viene a mi colegio cada 20 días y mi papá, cada 15 días. Si el primer día de clase siempre se encuentran, ¿cada cuántos días se encuentran nuevamente mi papá y el inspector de educación?

**4** Con las figuritas que tengo puedo formar grupos de 8, de 10 o de 15 aunque siempre me sobran dos. ¿Cuántas figuritas tengo como mínimo?

**5** A lo largo de una avenida de 2 kilómetros, y empezando de un extremo, se han plantado árboles cada 20 metros y postes cada 30 metros. ¿Cuántas veces coinciden árboles y postes en toda la avenida?

## Nivel intermedio

**6** Sandro tiene 36 dulces de chocolate y Perico tiene 48 dulces de fresa. Desean regalar los dulces a sus amigos, de modo que cada amigo reciba la misma cantidad de dulces de cada clase. ¿A cuántos amigos alcanza como máximo? ¿Cuántos dulces recibirá en total cada amigo?

**7** En un vecindario, un heladero pasa cada 2 horas y un reciclador pasa cada 3 horas. Hace 3 horas pasaron juntos. ¿Dentro de cuántas horas volverán a pasar juntos?

**8** En una banda compuesta por un baterista, un guitarrista, un bajista y un saxofonista, el baterista toca en lapsos de 4 tiempos, el guitarrista en 12 tiempos, el bajista en 6 tiempos y el saxofonista en 8 tiempos. Si todos empiezan al mismo tiempo, ¿después de cuántos tiempos sus periodos volverán a iniciar al mismo tiempo?

**9** En un colegio, el timbre de primaria toca cada 36 minutos y el de secundaria, cada 45 minutos. Ambos suenan a las 8 de la mañana y vuelven a coincidir a la hora del recreo. ¿A qué hora es el recreo?

## Nivel avanzado

**10** Iván va a construir un prisma rectangular de dimensiones 60x50x45 cm, con cubos iguales de volumen máximo. ¿Cuántos cubos tiene que comprar Iván y con qué dimensiones?

**11** Juan, Paul, David y Andrea van a correr a un parque todos los días. Juan le da una vuelta al parque en 2 minutos, Paul le da 3 vueltas al parque en 7 minutos con 30 segundos, David le da 4 vueltas en 9 minutos con 20 segundos y Andrea le da 2 vueltas al parque en 4 minutos con 20 segundos.
Si todos parten al mismo tiempo y del mismo lugar, ¿cuánto tardarán en encontrarse todos en el punto de partida?

**12** En el aeropuerto Jorge Chávez, sale un avión a Madrid cada 40 minutos, uno a Bogotá cada 50 minutos y otro a México cada hora. La programación de los vuelos comienza a las 00:00 h. ¿A qué hora del día despegan 3 aviones al mismo tiempo con destino a las mencionadas ciudades? ¿Cuántas veces al día se da la coincidencia (hasta las 24:00 h)?



# Tarea

**1** El buque "Miguel Grau" sale del puerto del Callao cada 36 días, "La Esmeralda", cada 48 días y "El Velero", cada 54 días. Si un día salen los tres juntos, ¿después de cuántos días volverán a hacerlo?

**2** Un ciclista tarda 35 segundos en dar la vuelta a una pista circular y otro, 42 segundos. Si parten simultáneamente del mismo punto y en sentidos contrarios, ¿después de cuántos segundos vuelven a encontrarse por segunda vez en el punto de partida?

**3** Un alambre de 420 cm y otro de 700 cm de longitud se desean trozar en partes de la misma longitud y en la mayor cantidad posible. ¿Cuál debe ser la longitud de cada trozo?

**4** Con una cubeta se desea llenar tres reservorios de agua de 840 litros, de 1200 litros y 1800 litros. ¿Qué capacidad debe tener la cubeta de modo que se puedan llenar los tres reservorios y vertiendo el menor número de cubetas y sin que falte ni sobre agua?

# MCD Y MCM - Propiedades

Métodos de obtención del MCD y MCM

Mauricio trabaja de mozo en un restaurante. Una mañana le trajeron 45 rosas y 30 crisantemos para colocarlos en los floreros de las mesas del restaurante.

Mauricio quiere poner en cada florero el mismo número de flores de cada clase y que alcancen para el mayor número de mesas.

VIDEO DE TEORÍA

**Responde:**

¿Cuántas flores de cada clase tiene que poner, y para cuántas mesas alcanzarán ellas?



### Cuando los números son PESI

Cuando dos números son PESI, el único divisor común que tienen es el 1. Entonces, el MCD de dos números PESI es la unidad y el MCM, el producto de los mismos.

- 8 y 15 son PESI:
  MCD(8; 15) = 1
  MCM(8; 15) = 8×15 = 120

### Cuando un número es múltiplo del otro

Si de dos números, uno de ellos es múltiplo del otro, el MCD es el menor y el MCM, el mayor.

- 24 es múltiplo de 12:
  MCD(24; 12) = 12
  MCM(24; 12) = 24

### Producto de dos números

El producto de dos números es igual al producto de su MCD y MCM.

- Dados los números 20 y 30: } 20×30 = 600
- MCD(20; 30) = 10
  MCM(20; 30) = 60 } 10×60 = 600

### Alteración del MCD y MCM

Si a dos números se le multiplica por algún factor natural, su MCD y MCM también quedan multiplicados por el mismo factor.

- MCD(12; 18) = 6
  MCM(12; 18) = 36
- MCD(24; 36) = 12
  MCM(24; 36) = 72 } Los números, el MCD y el MCM fueron multiplicados por 2.

**Completa** las tablas:

| Números | MCD | MCM |
|---|---|---|
| 5; 8 | | |
| 10; 11 | | |
| 8; 15; 24 | | |

| Números | MCD | MCM |
|---|---|---|
| 20; 60 | | |
| 15; 75 | | |
| 12; 24; 72 | | |

| Números | MCD | MCM |
|---|---|---|
| 12; 18 | | |
| 24; 36 | | |
| 48; 72 | | |

**Resolviendo:** (Problema introductorio)

- Puesto que en cada florero debe haber el mismo número de flores de cada clase, el número de floreros debe dividir a 30 y 45; además, ser el mayor posible, o sea, el MCD.
- MCD(30; 45) = 15 $\Rightarrow$ alcanza para 15 floreros.
- Número de rosas en cada florero: 45÷15 = 3.
- Número de crisantemos en cada florero: 30÷15 = 2.

$\therefore$ 15 floreros, cada uno con 3 rosas y 2 crisantemos.

**Nivel básico**

**1** En cada recuadro, **escribe** los signos >, < o =, según corresponda.

a) MCD(24; 12) ☐ MCD(12; 6)

b) MCD(200; 100) ☐ MCM(25; 4)

c) MCM(70; 35) ☐ MCM(7; 5)

**2** De las proposiciones, **identifica** las verdaderas

I. Si dos números se duplican entonces el MCD y MCM se duplican.

II. Si el MCM de dos números se divide entre cada uno de ellos los cocientes resultan PESI.

III. Si el MCD de dos números se divide entre cada uno de ellos, los cocientes resultan PESI.

**3** ¿Cuántos divisores comunes tienen 48 y 72?

**4** Para que el MCD de dos números sea par:

A) Al menos uno de ellos debe se par.

B) Los dos números deben ser pares.

C) No es necesario que sean pares.

**5** ¿Cuántos múltiplos comunes de 12 y 15 están comprendidos entre 100 y 200?

## Nivel intermedio

**6** En una calle instalan dos semáforos: uno de ellos se pondrá en verde cada 24 segundos y el otro, cada 36 segundos. Una vez que se conectan los semáforos, ¿cuánto tiempo tardarán en ponerse en verde al mismo tiempo por segunda vez?

**7** Alrededor de un cartel rectangular de 72 cm de largo y 60 de ancho, se coloca la menor cantidad de chinches. Si deben estar a la misma distancia una de otra, ¿cuántos chinches se colocan?

**8** Rogelio quiere cortar dos listones de madera en partes iguales para enrollarlos y guardarlos. Pero quiere cortarlos lo más largos posible para no desaprovecharlos. Si los listones miden 350 cm y 420 cm, ¿cuánto deben medir los trozos?

**9** Sarella quiere coser una colcha collage con retazos de tela cuadrados del mayor tamaño posible. La colcha tiene que medir 200 cm de alto y 180 cm de ancho. ¿Cuánto debe medir el lado de los retazos? ¿Cuántos retazos tiene que recortar para coser la cocha?

**10** Adolfo tiene 750 kg de cemento y 800 kg de arena. Quiere preparar sacos iguales con la misma proporción de cemento y arena para guardarlos en el depósito, pero desea comprar el mayor número posible de sacos. ¿Cuántos sacos debe comprar?

## Nivel avanzado

**11** Un autobús pasa por una parada cada 15 minutos, otro cada 20 minutos y un tercero cada 25 minutos. Si a las 9 de la mañana pasan por ese lugar los tres autobuses a la vez, ¿cuanto tiempo mínimo tiene que pasar para que vuelvan a pasar los tres simultáneamente? ¿A qué hora vuelven a coincidir?

**12** Aldo y Jonás tienen 25 semillas blancas, 30 semillas azules y 90 semillas rojas y quieren hacer el mayor número de collares iguales sin que sobre ninguna semilla.¿Cuántos collares pueden hacer?¿Qué número de semillas de cada color tendrá cada collar?

**13** Un estudiante de astronomía ha determinado que un cometa le da la vuelta al Sol cada 48 años y otro cometa, cada 72 años. La última vez que estuvieron alineados estas cometas fue hace 55 años. ¿Dentro de cuántos años volverán a alinearse?

**14** Gerardo quiere instalar en su jardín tres diferentes tomas de agua automáticas para regar. La primera toma se abrirá cada 5 horas, la segunda lo hará cada 6 horas y la tercera, cada 15 horas.

Si la primera vez que inicia el contador es al mediodía, ¿cuántas veces al mes todas las tomas empezarán a regar al mismo tiempo?



## Tarea

**1** Pedro está practicando béisbol con dos lanzadoras de bolas y su hermana Lucía programa las lanzadoras para que una dispare cada 12 segundos y la otra, cada 15 segundos. ¿Cuánto tiempo tardarán las máquinas en lanzar una bola al mismo tiempo por segunda vez?

**2** Marcos y Marta van a correr alrededor de una urbanización de su ciudad. Marcos tarda 16 minutos en dar una vuelta completa y Marta tarda 24 minutos. Si parten al mismo tiempo, ¿cuántas vueltas habrá dado cada uno hasta que coincidan por primera vez?

**3** Mauro se compró un auto cero kilómetros y le han recomendado que cambie de aceite cada 20 000 km y de filtros de aire, cada 15 000 km. ¿En cuántos kilómetros coincidirá por primera vez el cambio de aceite y el de filtros de aire?

**4** Carlos tiene una compañía que fabrica neumáticos y tiene que surtir un pedido de 320 neumáticos para la tienda A y 240 neumáticos para la tienda B.
Carlos decide utilizar camiones cargados con la misma cantidad de neumáticos, pero que sea la máxima posible para optimizar el tiempo. ¿Cuántos camiones debe enviar a cada tienda?

# Reforzando - Unidad 4

## Olimpiadas nacionales e internacionales

**1** El menor número divisible por 6; 8; y 12 es:

A) 40 B) 36 C) 48 D) 24

**2** Un número N es divisible por 10; 12 y 15. ¿Cuál de los siguientes números no puede ser el número N?

A) 420 B) 180 C) 260 D) 240

**3** Hilario hizo una lista de algunos números primos: 23; 57; 61; 73; 87; 93; 99
¿En cuántos se equivocó?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

**4** ¿Cuál es el mayor número que puede dividir a la vez a 520; 1560 y 1820?

A) 130 B) 65 C) 240 D) 260

**5** ¿Cuál es el menor número que se le debe agregar a 80 para que sea primo absoluto?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

**6** Los tigres constantemente trasladan sus crías de una guarida a otra para que no sean atacadas por los parásitos. Dos mamás tigresas trasladan sus crías, una llevándolas de 2 en 2 y la otra, de 3 en 3. Si empiezan y terminan al mismo tiempo y si tienen igual cantidad de crías, ¿cuántas tiene cada una?

A) 6 B) 3 C) 4 D) 5

**7** La edad de María es 30 años y la de su hermano Juanito es el mayor número que se obtiene al sumar dos divisores primos distintos de la edad de María. ¿Cuál es la edad de Juanito?

A) 15 B) 13 C) 11 D) 8

**8** Isaac dispone de dos listones de madera de longitudes 60 y 80 centímetros. Tiene que cortarlos en trozos iguales de forma que tenga el menor número posible de trozos. ¿En cuántos trozos debe cortar y cuánto deben medir?

A) 7; 15 B) 7; 20 C) 20; 7 D) 12; 15

**9** Alfonso calcula el MCM de $\overline{aa}$ y $\overline{bc}$. ¿Cuál de los siguientes números no puede ser el resultado que obtuvo Alfonso?

A) 88 B) 132 C) 242 D) 168

**10** ¿Cuál es la menor distancia que se puede medir exactamente con una regla de 30 cm, 40 cm ó de 50 cm?

A) 6 m B) 5 m C) 3 m D) 4 m

**11** Mirna quiere comprar lápices de color rojo y de color azul. Los lápices rojos vienen en cajas de 24 unidades, mientras que los azules vienen en cajas de 40. ¿Cuál es el mínimo número de cajas de cada color que debe comprar Mirna para tener el mismo número de lápices de ambos colores?

A) 5 cajas de rojos y 3 cajas de azules
B) 10 cajas de rojos y 6 cajas de azules
C) 6 cajas de rojos y 5 cajas de azules
D) 10 cajas de rojos y 12 cajas de azules

**12** Un cometa visita la Tierra cada 36 años y otro, cada 48 años. En el año 2000 coincidieron ambos en acercarse a la Tierra. ¿En qué año coincidirán de nuevo?

A) 2024 B) 2144 C) 2120 D) 2240

**13** El perro de Fabián está enfermo. El veterinario ha prescrito un tratamiento combinado de dos pastillas. La primera debe tomar cada 6 horas y la segunda, cada 8 horas. A las doce del mediodía, Fabián le da las dos pastillas. ¿A qué hora volverá a darle las dos pastillas juntas?

A) A las 12 del día
B) A las 12 de la noche
C) A las 6 de la mañana
D) A las 6 de la tarde

**14** Algunos días, Félix y Daniel llevan manzanas al colegio en su lonchera. Félix lleva siempre en paquetes de 4 manzanas y Daniel en paquetes de 6. Al finalizar un mes los dos contabilizaron el número de manzanas que habían llevado durante ese mes, y vaya sorpresa, los dos habían llevado la misma cantidad. Como mínimo, ¿cuántos días llevó manzanas al colegio Félix?

A) 6 B) 2 C) 4 D) 3

**15** Se desea acondicionar en cajas 360 polos y 480 chores, poniendo el mismo números de prendas en cada caja, sin mezclarlas y sin que sobre ninguna. ¿Cuántas cajas se necesitan como mínimo?

A) 120 B) 60 C) 7 D) 5

**16** Carla tiene tres envases con refrescos; uno con 30 litros de jugo de fresa, otro con 25 litros de jugo de manzana y otro con 20 litros de jugo de piña. Necesita envasar los jugos en botellas iguales de la mayor capacidad. ¿Qué capacidad tendrá cada botella si en los envases no debe sobrar refresco?

A) 4 L B) 5 L C) 6 L D) 7 L

**17** Indica cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- Un número primo no es divisible por ningún número. ( )
- Uno de los divisores de un número primo es primo también. ( )
- Las divisiones entre números primos son exactas. ( )

A) FVF B) FFF C) VVV D) FVV

**18** Ana abre su libro de matemáticas y observa que el producto de los números de las páginas es 420. ¿En qué páginas abrió el libro?

A) 7 y 60 B) 14 y 30
C) 20 y 21 D) 35 y 12

**19** Se desea cortar dos cordeles de 64 y 72 metros en trozos iguales de la mayor longitud posible. ¿Cuál será la longitud de cada trozo resultante?

A) 7 m B) 8 m C) 4 m D) 16 m

**20** Pedro tiene 30 años de edad. Si la edad de su tío es la suma de los divisores positivos de la edad de Pedro, ¿cuál es la edad del tío de Pedro?

A) 10 B) 11 C) 41
D) 62 E) 72

**21** Hay tres bombillos intermitentes: uno se enciende cada 4 segundos, el otro cada 5 segundos y el tercero cada 6 segundos. Si los tres bombillos se encienden simultáneamente a las 8:00 am, ¿cuál es el siguiente instante del día en el cual los tres bombillos coinciden nuevamente?

A) 10 : 00 am B) 12 : 00 am
C) 8 : 50 am D) 8 : 01 am
E) 12 : 01 am.

**22** Varios amigos preparan un mosaico cuadrado, uniendo piezas de 15 cm de largo por 12 cm de alto. No quieren romper ninguna pieza y los colocan siempre en la misma posición, con el lado mayor en la base. ¿Cuánto medirá el lado del mosaico?

A) 48 cm B) 54 cm
C) 60 cm D) 72 cm

**23** Un ratón tarda 12 segundos en recorrer una pista circular, mientras que otro ratón tarda 16 segundos. Los dos ratones parten del mismo punto y al mismo tiempo y terminan su carrera 2 minutos y 20 segundos después. ¿Cuántas veces después de la partida coinciden los dos ratones en el punto de partida?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

**24** ¿Cuánto es la menor suma de dinero que necesita Isabel para comprar polos de S/. 20; S/. 24; o S/. 28 y cuántos polos de S/. 24 podrá comprar?

**25** De un grupo de 172 alumnos, los varones pueden ser agrupados de 8 en 8, de 10 en 10 o de 12 en 12. Si el resto son niñas, ¿cuántas son ellas?

**26** ¿Cuál es la menor capacidad de un reservorio que puede ser llenado por cualquiera de los caños, que arrojan 18; 24 ó 36 decalitros por minuto?

**27** Helen cuenta botones de 4 en 4, de 6 en 6 y de 8 en 8 docenas y le sobran siempre 3 docenas. ¿Cuántos botones tiene como mínimo Helen?

**28** ¿Cuál es el menor número de caramelos que se puede repartir entre 15 o 20 niños?

**29** Se quiere cortar cintas de 12 metros y 16 metros de longitud en pedazos iguales y de la mayor longitud posible. ¿Cuál será la longitud de cada pedazo?

**30** ¿Cuántos de los siguientes números 1; 2 ; 3; ... ; 500 no son múltiplos de 12?

**31** En una competencia automovilística de circuito cerrado, tres automóviles arrancan juntos. Si tardan 10; 12 y 15 minutos en dar una vuelta completa, ¿al cabo de qué tiempo pasarán juntos por la línea de partida?

**32** Tres naves pasan por cierto puerto. La primera cada 8 días, la segunda cada 18 días y la tercera cada 21 días. ¿Cada cuántos días coinciden los tres buques en este puerto?

**33** Tres aviones salen de una misma ciudad con una periodicidad de 4 días; 5 días y 10 días. Si la última vez que salieron juntos fue el 14 de julio, ¿cuál será la próxima fecha en que volverán a salir juntos?

**34** ¿Cuál es el mayor número de niños entre los cuales hay que repartir 12; 24 y 60 panes simultáneamente para que, en cada caso, cualquier niño reciba la misma cantidad?

**35** Dos ciclistas dan vueltas en una pista; el primero cada 48 segundos y el segundo cada 64 segundos. Si salen juntos, ¿al cabo de cuánto tiempo pasarán juntos por el sitio de partida?

**36** Al detective Peter le han enviado en un telegrama un mensaje con la clave para abrir la caja fuerte donde se encuentran los documentos secretos. El mensaje dice lo siguiente:

*La clave es el menor número que se puede dividir exactamente por todos los números del 1 al 9.*

¿Cuál es el número de la clave?

**37** ¿Cuál es la mayor longitud de una regla con la que se puede medir exactamente las dimensiones 280; 1120 y 16000 metros?

**38** Los números 105; 108; 112 y 120 se pueden obtener como el producto de tres números enteros positivos diferentes y menores que 10. ¿Cómo?

**39** Se tienen que envasar 120 kg; 144 kg y 200 kg de plomo en tres cajas, de modo que los bloques de cada clase tengan el mismo peso y el mayor posible. ¿Cuánto pesa cada pedazo de plomo?

# Autoevaluación

1. ¿Cuál es el mayor número que puede dividir a la vez a los números 612; 2040 y 3570?

2. ¿Cuál es la menor longitud que debe tener una varilla para que se la pueda dividir exactamente en trozos de 27 cm; 36 cm; ó 45 cm de longitud?

3. Una madre distribuye en partes iguales 112 caramelos y 120 chocolates entre sus hijos. ¿A lo más, cuántos hijos tiene?

4. ¿Cuál es la mayor longitud de una regla con la que se puede medir exactamente 3 cintas de 120 cm; 180 cm y 240 cm?

5. Se tienen tres cubos de 84 $cm^3$; 270 $cm^3$ y 330 $cm^3$. ¿Cuál es el mayor volumen, en $cm^3$, que cabe un número exacto de veces en cada uno de ellos?

6. Un tren sale cada 5 horas, otro tren sale cada 3 horas. Si han salido al mismo tiempo a las 9 de la mañana, ¿a qué hora volverán a coincidir?

7. Tres perros salen juntos en una carrera y tardan 20; 33 y 36 segundos en dar la vuelta a la pista. Si parten juntos, ¿al cabo de cuántos segundos volverán a pasar juntos por la línea de salida?

8. ¿Cuántos jabones como mínimo tiene Elena si al contarlos de 6 en 6 le sobran 2, de 9 en 9 le sobran 5, de 12 en 12 le sobran 8 y de 20 en 20 le sobran 16?

# 5 Números racionales

En los cálculos cotidianos es común el uso de los números racionales. La ventaja de los números racionales es que nos permiten calcular cantidades grandes y muy pequeñas.

Enfoque de igualdad de género

## Valoramos el rol de la mujer en la sociedad

Durante muchos años las mujeres han luchado por tener los mismos derechos que los hombres. En la actualidad la mujer se desempeña en todas las actividades de la sociedad tratando de hacerlo en igualdad de derechos que el hombre.

Su rol como madre es de gran importancia en la sociedad, como responsable de la formación física, emocional e intelectual de los hijos. Se reconoce su rol como cónyuge en el fortalecimiento de la familia como célula de la sociedad.

| Resuelve problemas de cantidad (Aritmética) | |
|---|---|
| **Capacidades** | **Desempeños** |
| **Traduce cantidades a expresiones numéricas** | Escribe enunciados referidos a fracciones. |
| **Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones** | Compara los números fraccionarios y decimales. |
| **Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo** | Realiza operaciones y resuelve problemas de fracciones y decimales. |
| **Argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones** | Interpreta y explica el número decimal como resultado de la división de los términos de una fracción. |

# Fracciones

4 operaciones y MCM

El ingeniero Campos está construyendo un puente con un presupuesto de 1 830 000 soles. A la hora de elaborar el informe del avance de la obra, comprobó que se había avanzado los 4/5 de la obra, sin embargo, ya se había gastado los 5/6 del presupuesto.

VIDEO DE TEORÍA

**Responde:**

¿En cuánto se ha excedido del presupuesto hasta el estado actual de la obra? _____

### Número racional

Es todo número que puede ser representado como la división de dos números naturales. Así el número 4 es racional porque se puede expresar como 8/2.

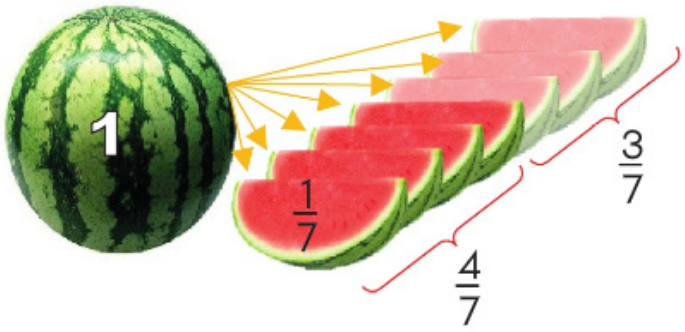
### Número fraccionario

Es un número racional donde el dividendo, llamado **numerador**, no es múltiplo del divisor, llamado **denominador**. Así 5/4 es fraccionario pero 6/3 no lo es.

Fracción: $f = \frac{a}{b}$ ($a$ = numerador, $b$ = denominador) $a, b \in \mathbb{N}, a, b \neq 0, a \neq b$, $a$ y $b$ son términos de la fracción.

Son fracciones: $\frac{3}{4}; \frac{12}{5}; \frac{15}{6}; \frac{1}{5}$ No son fracciones: $\frac{6}{2}; \frac{12}{3}; \frac{15}{0}; \frac{0}{4}$

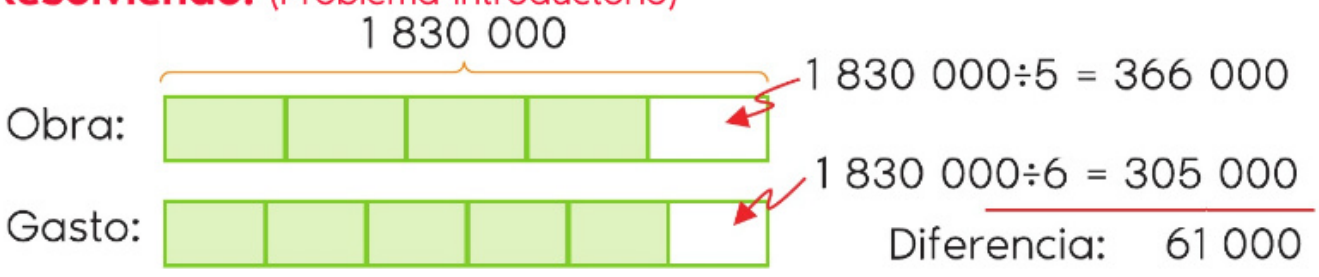
## Interpretación práctica de una fracción




Vamos a suponer que 1 sandía se divide en 7 partes iguales, entonces cada parte es 1/7. Si se consume 3 de las partes se expresa como 3/7.

Una fracción se interpreta como la cantidad de partes que se toma de la unidad dividida en partes iguales.

**Resolviendo:** (Problema introductorio)




∴ Hasta el momento se ha excedido en 31 000 soles.

## Ten en cuenta

### CLASIFICACIÓN DE FRACCIONES

Las fracciones se clasifican de acuerdo a estos criterios:

**1. Por la comparación de sus términos.**

**Propia:** numerador < denominador

**Impropia:** numerador > denominador

La fracción impropia da origen a la fracción mixta.

**2. Por el denominador común entre sus términos.**

**Reductible:** Numerador y denominador tienen un factor común aparte de la unidad.

**Irreductible:** Numerador y denominador son PESI.

**3. Por la naturaleza del denominador.**

**Decimal:** Si el denominador es una potencia de 10: 10; 100; 1000; ...

**Fracción común u ordinaria:** Si el denominador es diferente a una potencia de 10.

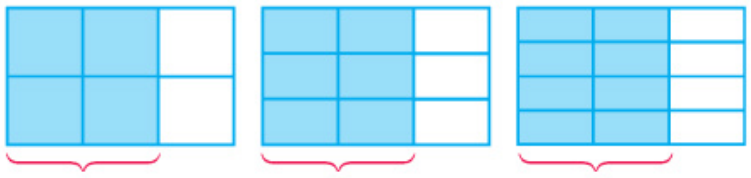
**4. Por el denominador de varias fracciones.**

**Homogénea:** Si tienen denominadores iguales.

**Heterogéneas:** Si tienen denominadores diferentes.

## Fracciones equivalentes

Observa las siguientes figuras:



$\frac{4}{6}$ $\frac{6}{9}$ $\frac{8}{12}$

Dos fracciones son equivalentes si representan el mismo número.

Se escribe así: $\frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12}$

## Expansión y simplificación y de fracciones

Una fracción se expande multiplicando ambos términos por un mismo factor.

$$\frac{2}{3} \overset{\times 2}{=} \frac{4}{6} \overset{\times 3}{=} \frac{6}{9} \overset{\times 4}{=} \frac{8}{12} = \ldots$$

Una fracción se simplifica dividiendo ambos términos entre un mismo número:

$$\frac{24}{36} \overset{\div 2}{=} \frac{12}{18} \overset{\div 2}{=} \frac{6}{9} \overset{\div 3}{=} \frac{2}{3} = \ldots$$

## Homogenización de fracciones

### *Ejemplo 1*

Amelia, Benita y Carmen son vendedoras de productos de belleza. Cada mes deben alcanzar una meta de venta. Cierto mes, Amelia llegó a los 7/8 de la meta, Benita a los 3/4 y Carmen a los 11/12. ¿En qué orden quedaron en las ventas de ese mes?

**Resolviendo:**

- Para ordenar las fracciones es conveniente que todas tengan el mismo denominador: $\frac{7}{8}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{11}{12}$

- El denominador común debe contener a los denominadores, por lo que debe ser el MCM: MCM(8; 4; 12) = 24

Para que 8 sea 24 hay que multiplicar por 24÷8 = 3.

$$\frac{7\times 3}{8\times 3} = \frac{21}{24}$$

Para que 4 sea 24 hay que multiplicar por 24÷4 = 6.

$$\frac{3\times 6}{4\times 6} = \frac{18}{24}$$

Para que 12 sea 24 hay que multiplicar por 24÷12 = 2.

$$\frac{11\times 2}{12\times 2} = \frac{22}{24}$$

$$\frac{18}{24} < \frac{21}{24} < \frac{22}{24} \Rightarrow \frac{3}{4} < \frac{7}{8} < \frac{11}{12}$$

1° Carmen
2° Amelia
3° Benita

Forma práctica de homogenizar:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | 4 | 12 | 4 |
| 2 | 1 | 6 | 2 |
| 1 | 1 | 3 | 3 |
| 1 | 1 | 1 | MCM = 24 |

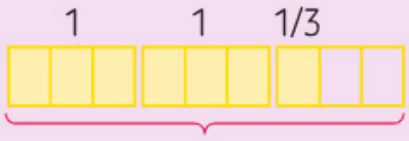
$\frac{7}{8} = \frac{21}{24}$ $\frac{3}{4} = \frac{18}{24}$ $\frac{11}{12} = \frac{22}{24}$

### Ten en cuenta

#### Números Mixtos

Toda fracción impropia genera una fracción mixta.

Un número mixto está formado por una parte entera y otra fraccionaria.




$$2 + \frac{1}{3} = 2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Donde:

$2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ y $7 \div 3 \Rightarrow \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$

#### Comparación de fracciones

¿Cuál de las fracciones es mayor: $\frac{4}{5}$ o $\frac{5}{6}$?

Vamos a suponer que son iguales: $\frac{4}{5} = \frac{5}{6}$

Si fueran iguales se cumpliría:

$$\frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \Rightarrow 4\times 6 = 5\times 5$$
$$24 = 25$$

Pero $24 < 25 \Rightarrow \frac{4}{5} < \frac{5}{6}$

En forma práctica:

$24 < 25$

$\frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{4}{5} < \frac{5}{6}$

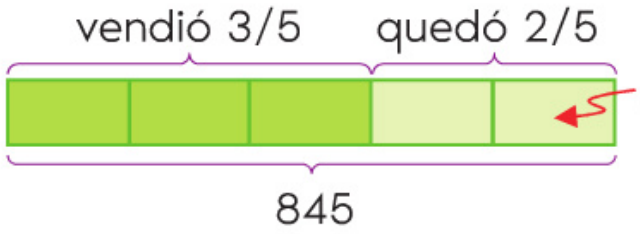
Para comparar varias fracciones se homogenizan. Es mayor el que tiene mayor numerador.

## Fracción de una cantidad

### *Ejemplo 2*

Jaime compró mercadería por un valor de 845 soles y solo pudo vender los 3/5 de ella. ¿En cuánto está valorizada la mercadería sin vender?

**Resolviendo:**




845÷5 = 169

Quedó por vender un valor de:
2×169 = 338

Un modo práctico de calcular la fracción de una cantidad es:

$$\frac{2}{5} \text{ de } 845 = \frac{2}{\cancel{5}_{1}} \times \cancel{845}^{169} = 338$$

**Ten en cuenta**

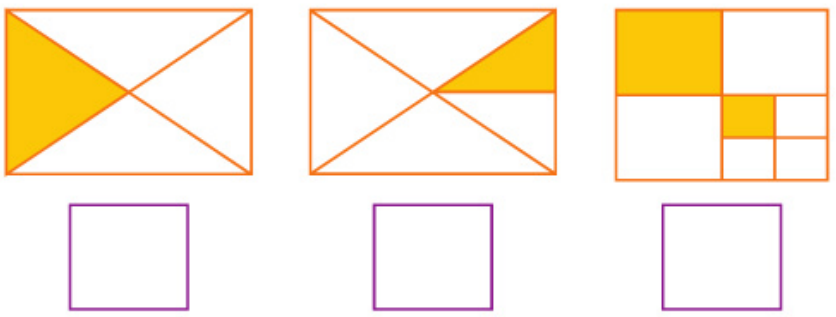
**Forma general de la fracción equivalente**

Toda fracción equivalente a la fracción irreductible $\frac{a}{b}$ es de la forma $\frac{ak}{bk}$.

$$\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk};\ k \in \mathbb{N} \text{ y } k \neq 0$$

**Nivel básico**

**1** **Expresa** mediante una fracción la parte coloreada de la figura:



**2** Aldo partió en 12 porciones iguales la torta de su cumpleaños. Si 9 de las porciones las repartió entre sus amigos, ¿qué parte de la torta le queda?

**3** Nilda llevó al colegio 500 mililitros de agua. Si le quedan 300 mililitros, ¿qué parte ya consumió?

**4** Oswaldo heredó su fortuna a sus hijos David, Piero y Jazmín, los 2/5, los 4/10 y el resto, respectivamente. Luego de leer el testamento, David reclamó al padre por qué había dejado más a Piero. ¿Tenía razón? **Explica.**

**5** Una pelota cae desde 5 metros de altura y rebota hasta 3 metros de altura. ¿Qué fracción de la altura inicial alcanza en el rebote?

## Nivel intermedio

**6** ¿Cuál de las siguientes fracciones impropias resulta $5\frac{3}{7}$ cuando se la convierte en fracción mixta?

a) $\frac{36}{7}$ b) $\frac{37}{7}$ c) $\frac{76}{14}$

**7** Omar tiene un lote de terreno de 140 metros cuadrados; de los cuales ha construido 80 metros cuadrados. ¿Qué parte del terreno está sin construir?

**8** En el problema anterior, la municipalidad le obliga a Omar mantener la séptima parte del lote como área libre. ¿Cuántos metros cuadrados más puede construir?

**9** César ha comprado una pelota en 70 soles y la vendió ganando los 3/7 del costo. ¿En cuánto la vendió?

**10** Carlos, Rafael y Dina fueron de paseo al campo. Cada uno llevó un litro de agua. Luego de dos horas de caminata, a Carlos le queda 4/7 de litro, a Rafael 2/5 y a Dina 5/8. ¿A quién le queda más agua?





GENIOMATIC

## Nivel avanzado

**11** Cuando se suma 3 a los dos términos de la fracción $\frac{2}{5}$; entonces la fracción:

a) Aumenta  b) Disminuye  c) No cambia

**12** ¿Cuántas de las siguientes fracciones son equivalentes a 7/9?

a) $\frac{21}{27}$  b) $\frac{35}{45}$  c) $\frac{42}{63}$  d) $\frac{56}{72}$

**13** De los 600 alumnos de un colegio, los 2/3 son de primaria y el resto, de secundaria. Si 150 de los alumnos de secundaria son varones, ¿qué fracción del total son las mujeres de secundaria?

**14** Estoy comprando a plazos un auto que cuesta 8000 soles. Si ya pagué 6400, ¿qué parte del precio me falta pagar?



## Tarea

**1** Una fábrica debe producir 6000 zapatillas al mes. Si le falta producir 3600 zapatillas, ¿qué parte de la producción mensual ya está hecha?

**2** De los 300 alumnos de un colegio, 180 se fueron de paseo. ¿Qué parte de ellos no fue de paseo?

**3** De un total de 400 huevos se vende la mitad, y la cuarta parte del resto se rompe. ¿Cuántos huevos quedan sanos?

**4** Al comprar una mototaxi, Piero se compromete a pagarla en 12 cuotas del mismo monto. Si en los primeros 5 meses pagó 1500, ¿cuánto le falta pagar?

# Operaciones con fracciones

4 operaciones y MCM

Félix viajó a su pueblo natal visitando en el camino diversos lugares del Perú. Llegó en 3 días y recorrió 980 km.

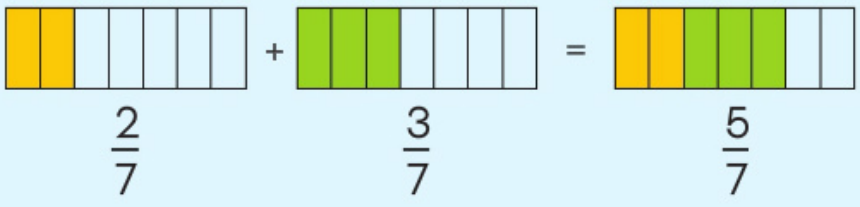
El primer día recorrió los 2/5 del trayecto y el segundo día los 3/7.

VIDEO DE TEORÍA

**Responde:**

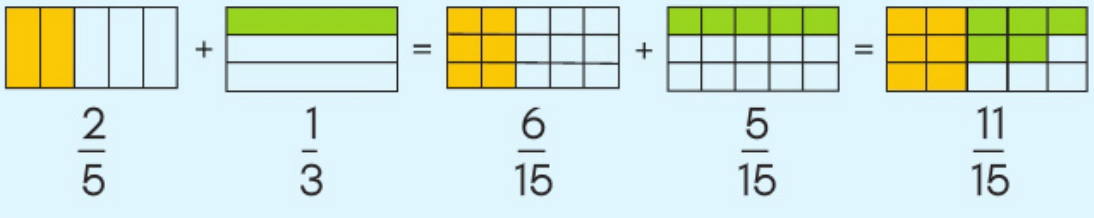
¿Cuántos kilómetros recorrió el último día? _____

## Adición de fracciones homogéneas




Para sumar o restar **fracciones homogéneas** se suman los numeradores y se mantiene el denominador.

## Adición de fracciones heterogéneas




Para sumar, las partes deben ser del mismo tamaño. Por ello, para sumar o restar **fracciones heterogéneas**, hay que homogenizarlas previamente.

**Resolviendo:** (Problema introductorio)

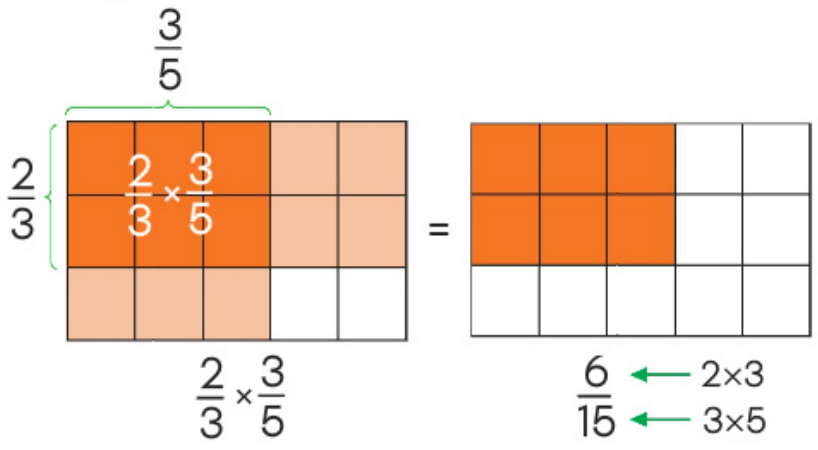
En los dos primeros días recorrió:

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{7}=\frac{\overbrace{2\times7}^{14}+\overbrace{3\times5}^{15}}{35}=\frac{29}{35}$$

El 3° día recorrió:

$$1-\frac{29}{35}=\frac{35-29}{35}=\frac{6}{35}\Rightarrow\frac{\overset{28}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{35}}}\times\cancel{980}=168\text{ km}$$

## Multiplicación de fracciones




En la multiplicación no interesa si las fracciones son homogéneas o heterogéneas, se multiplican entre sí los numeradores y los denominadores.

## División de fracciones

La división de 2 entre 3 es $\frac{2}{3}=2\times\left(\frac{1}{3}\right)$ ← Inversa de 3.

Dividir 2 entre 3 equivale a multiplicar 2 por la inversa de 3.

∴ Dividir $\frac{a}{b}$ entre $\frac{c}{d}$ equivale a multiplicar $\frac{a}{b}$ por $\frac{d}{c}$.

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$$

### Ten en cuenta

**Casos particulares de multiplicación**

- $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$
- $a\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{d}$
- $\frac{c}{d}\times a=\frac{c\times a}{d}$

**Inversa de una fracción**

- La inversa de $a$ es $\frac{1}{a}$
- La inversa de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$

Resuelve problemas de cantidad (Aritmética)

### *Ejemplo 1*

Tengo una barra de chocolate. El primer día consumo la tercera parte y el segundo día los 2/5. ¿Qué parte del chocolate me queda?

**Resolviendo:**

Primer día: $\frac{1}{3}$ Segundo día: $\frac{2}{5}$

Los dos días: $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{5+6}{15} = \frac{11}{15}$

$\therefore$ Me queda el complementario de $\frac{11}{15}$, que es $\frac{4}{15}$.

### *Ejemplo 2*

Tenía 150 soles. Con los 3/10 compré un par de zapatillas, con 1/6, una camisa y con el resto, un pantalón. ¿Cuánto costó el pantalón?

**Resolviendo:**

Zapatillas: $\frac{3}{10}$ Camisa: $\frac{1}{6}$

Total de gasto: $\frac{3}{10} + \frac{1}{6} = \frac{9+5}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$

Me queda el complementario de 7/15, que son los 8/15 de 150:

$$\frac{8}{15} \text{ de } 150 = \frac{8}{15} \times 150 = \frac{8 \times 150}{15} = 80$$

### *Ejemplo 3*

¿Cuántos $\frac{3}{4}$ hay en $\frac{15}{2}$?

**Resolviendo:**

$$\frac{15}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{15}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{60}{6} = 10$$

### *Ejemplo 4*

Carlitos gastó su propina de la siguiente manera: primero los 2/9, luego los 3/7 del resto y por último los 24 restantes. ¿De cuánto fue su propina?

**Resolviendo:**

Gastando $\frac{2}{9}$ queda los $\frac{7}{9}$. Al gastar $\frac{3}{7}$ de $\frac{7}{9}$ queda los $\frac{4}{7}$ de $\frac{7}{9}$:

$\frac{4}{7}$ de $\frac{7}{9} = \frac{4}{\cancel{7}} \times \frac{\cancel{7}}{9} = \frac{4}{9}$

De la propina quedó los $\frac{4}{9}$ que son 24 soles, entonces $\frac{1}{9}$ es 24÷4 = 6 y la propina:

6×9 = 54 soles.

## Nivel básico

**1** De los 3600 soles que tenía me quedan 2400 soles. ¿Qué parte de lo que tenía lo gasté?

**2** Una obra de 90 días de duración fue ejecuta ya en sus 7/18 partes. ¿Cuántos días faltan para culminarla?

**3** Ayer leí los 3/8 de *El Quijote*, hoy pienso leer los 2/9. ¿Qué parte me quedará para leer mañana?

**4** Se han vendido 240 pollos de 5/6 kilogramos de peso cada uno. ¿Cuántos kilogramos de pollo se ha vendido?

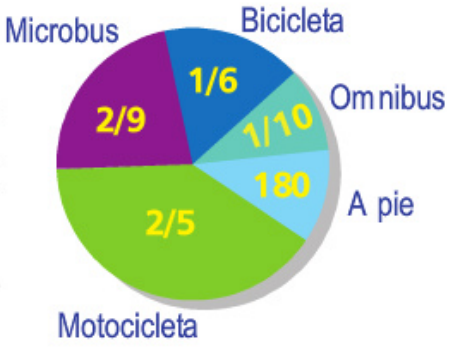
**5** Se desea separar un saco de arroz de 60 kilogramos en bolsas de 3/4 de kilogramo. ¿Cuántas bolsas son necesarias?

## Nivel intermedio

**6** Una camioneta tiene un tanque de 15 galones de capacidad. Si en un kilómetro consume 1/35 de galón, ¿cuántos kilómetros puede recorrer llenando el tanque?

**7** Una vela se consume en 5 horas. Si luego de estar prendida 3 horas tiene una altura de 6 cm, ¿qué longitud tiene la vela?

**8** Los habitantes de cierta ciudad se desplazan según los medios que muestra el gráfico circular. ¿Cuántos se desplazan en motocicleta?




**9** Hubert debe leer un libro de 300 páginas en una semana. El lunes y martes lee los 2/15, el miércoles, jueves y viernes, los 3/10 y los días restantes de la semana el resto del libro. ¿Cuántas páginas lee el sábado y el domingo?

**10** Hace 3 años me compré un carro. El primer año se devaluó la quinta parte, el segundo año, la décima parte y el tercer año, la doceava parte. Si actualmente su precio es S/. 9900, ¿cuánto costó inicialmente?





GENIOMATIC

## Nivel avanzado

**11** Manolo vendió su bicicleta. Con los 3/8 del importe compró un televisor y con los 3/5 del resto, una pelota. Si todavía le quedan 36 soles, ¿en cuánto vendió su bicicleta?

**12** Los alumnos de mi aula se han dividido en dos grupos, uno de los cuales tiene los 6/7 del otro. Por tal motivo tuvieron que pasar 6 alumnos de un grupo a otro para que tengan igual cantidad de integrantes. ¿Cuántos somos en el aula?

**13** Gerardo apostó su dinero en la ruleta. En el primer juego ganó los 3/8 y se animó a apostar nuevamente todo lo que tenía, aunque esta vez perdió los 3/5 de lo que apostó. ¿Ganó o perdió en los dos juegos y qué parte de lo que tenía al principio?

**14** Compré una casaca. Para ofrecerla aumenté su precio en sus 3/5, pero al momento de venderla lo rebajé en 2/7 del precio al que ofrecí y aún así gané 24 soles. ¿Cuánto me costó la casaca?

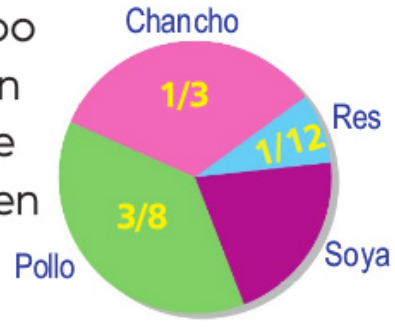


## Tarea

**1** De mi sueldo, de S/. 800, me descuentan S/. 160 por viáticos. ¿Qué parte de mi sueldo me queda?

**2** Cada día se pinta los 2/5 de una pared de 6 $m^2$ de área. Después de dos días, ¿cuánto falta pintar?

**3** El gráfico muestra el tipo de carne que consumen las mujeres. ¿Qué parte de las mujeres consumen carne se soya?




**4** Se compra 1 metro cuadrado de tela, pero al lavar se encoge 1/3 en un lado y en el otro se estira en 1/5. ¿En cuánto varía el área?

Fracciones

# Números decimales

Laura es farmacéutica. Para la fabricación de pastillas de ampicilina dispone de 0,5 kg de ampicilina en polvo.

Las pastillas se fabrican mezclando la ampicilina en polvo con otros componentes en proporciones fijas.

VIDEO DE TEORÍA

**Responde:**

¿Cuántas pastillas de ampicilina de 500 miligramos puede fabricar? _____

Al dividir el numerador de una fracción entre el denominador se obtiene un número decimal. Por consiguiente, el número decimal es la expresión lineal de una fracción.

$$\frac{364}{125} = 2{,}912$$

Parte entera — Coma decimal — Parte decimal

**Resolviendo:** (Problema introductorio)

500 mg.

- 1 kg = 1000 g ⇒ 0,5 kg = 500 g.
- 1 g = 1000 mg ⇒ 500 g = 500 000 mg.

Número de pastillas: 500 000÷500 = 1 000

∴ Puede fabricar 1000 pastillas de 500 miligramos.

## Expresión oral y escrita de los números decimales

| | PARTE ENTERA | | | | | | | | | | | PARTE DECIMAL | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de los órdenes | Millar de millón | Centenas de millón | Decenas de millón | Unidad de millón | Centenas de millar | Decenas de millar | Unidades de millar | Centenas | Decenas | Unidades | Coma decimal | Décimos | Centésimos | Milésimos | Diez milésimos | Cien milésimos | millonésimos | Diez millonésimos | Cien millonésimos | Mil millonésimos | Diez mil millonésimos | Cien mil millonésimos | Billonésimos |
| Valor del orden | $10^9$ | $10^8$ | $10^7$ | $10^6$ | $10^5$ | $10^4$ | $10^3$ | $10^2$ | 10 | 1 | | $10^{-1}$ | $10^{-2}$ | $10^{-3}$ | $10^{-4}$ | $10^{-5}$ | $10^{-6}$ | $10^{-7}$ | $10^{-8}$ | $10^{-9}$ | $10^{-10}$ | $10^{-11}$ | $10^{-12}$ |

## Clasificación de números decimales

| Número decimal exacto | Número decimal inexacto | |
|---|---|---|
| | Número decimal periódico puro | Número decimal periódico mixto |
| $\frac{25}{8} = 3{,}125$ | $\frac{24}{11} = 2{,}1818\ldots = 2{,}\widehat{18}$ (Parte periódica) | $\frac{85}{44} = 1{,}931818\ldots = 1{,}93\widehat{18}$ (Parte no periódica; Parte periódica) |
| Se origina cuando el denominador solo contiene factores 2 y/o 5. | Se origina cuando el denominador no contiene factores 2 ni 5. | Si el denominador contiene factores 2 y/o 5 y factores distintos a éstos. |

Resuelve problemas de cantidad (Aritmética)



GENIOMATIC

## Redondeo de números decimales

Es común ver en la etiqueta de los productos los precios con decimales 0,99.

Si compras este vestido pagarías S/. _____

Redondear o aproximar un número decimal es eliminar las cifras a la derecha de la cifra de aproximación.

Aproximemos 9,5863 a décimos:

1° Fijamos la cifra de aproximación:

Cifra de aproximación
1 9,5863
Cifra de la derecha

2° Si la cifra a la derecha de la de aproximación es 5 o mayor que 5, se redondea aumentando en 1 la cifra de aproximación, en caso contrario, se redondea manteniendo igual la cifra de aproximación.

$1\,9{,}5863 \Rightarrow 1\,9{,}5863 \approx 19{,}6$

Mayor que 5 — Aproximadamente igual a

***Ejemplo 1***

**Aproxima** el número 56,3472 a:

a) Milésimos b) Centésimos c) Décimos d) Enteros

**Ten en cuenta**

**Comparación de números decimales**

Comparemos 76,6438 y 76,6481.

1º Comparamos la parte entera.

76,6438 } Las partes enteras
76,6481 } son iguales

2º Luego comparamos las cifras decimales, desde la coma hacia la derecha, en cada orden, hasta encontrar una cifra mayor que la correspondiente del otro número. El número que contiene dicha cifra es el mayor.

76,6438 }
76,6481 } 8 > 3

Como 8 > 3

$\Rightarrow$ 76,6481 > 76,6438

## Conversión de decimal a fracción

Como los decimales provienen de fracciones, vamos a aprender a expresar decimales en fracciones. Como hay tres tipos de números decimales, hay tres casos de conversión de decimal a fracción.

### De decimal exacto a fracción

El numerador es el decimal sin la coma y el denominador, la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el número.

$$0{,}243 = \frac{243}{1000}$$

### De decimal inexacto periódico puro a fracción

El numerador es el decimal sin la coma y el denominador tantos nueves como cifras tenga el período.

$$0{,}\overline{125} = \frac{125}{999}$$

### De decimal inexacto periódico mixto a fracción

El numerador es el decimal sin la coma menos la parte no periódica, y el denominador, tantos nueves como cifras tiene el período seguido de tantos ceros como cifras no periódicas tenga el número.

$$0{,}35\overline{851} = \frac{35851 - 35}{99900} = \frac{35816}{99900} = \frac{242}{675}$$

# Operaciones con números decimales

**Adición de decimales exactos:**

Se escriben los números en columna, de tal manera que las comas decimales coincidan a la misma altura, luego se suma como en el caso de los naturales y se coloca la coma decimal a la misma altura.

Sumemos: 1,2 + 0,375 + 0,08 + 31,367

```
 1,2    +          1,200  +
 0,375             0,375
 0,08              0,080
31,367            31,367
------            ------
33,022            33,022
```

También se puede completar con ceros para alinear las comas.

**Multiplicación de decimales exactos:**

Se multiplica como si fueran naturales y en el producto final se separa tantas cifras decimales como hay en los factores.

```
  2,26  ×   ← 2 cifras
   0,3      ← 1 cifra
-------
 0,678      ← 3 cifras
```

**División de números decimales:** Dividamos 24,345÷5,41

1° Igualamos con ceros a la derecha la cantidad de cifras decimales: 24,345÷5,410 (3 y 3)

2° Eliminando las comas dividimos como números naturales.

3° Si habiendo obtenido el residuo se quiere seguir dividiendo, se agrega cero al residuo y una coma al cociente y se continúa con la división.

```
24345 | 5410
21640   4,5
 27050
 27050
 -----
```

Resuelve problemas de cantidad (Aritmética)

## Nivel básico

**1** Una manzana pesa 0,350 kilogramos y una pera pesa 0,035 gramos más. ¿Cuánto pesan las dos?

**2** Un gramo de acero contiene 0,002 gramos de carbón, siendo el resto fierro. ¿Cuántos gramos más de fierro que de carbón hay en un gramo de acero?

**3** Con un billete de 20 soles compré 12 panes a S/. 0,15 cada uno y 3 kilogramos de azúcar a 2,35 el kilogramo. ¿Cuánto de vuelto me dieron?

**4** Si le doy S/. 2,5 a Javier, se triplica lo que tiene. ¿Cuánto tiene Javier?

**5** El pan pesa 123,5 gramos y el huevo, 164,6 gramos. Si al freír el huevo se pierde 5,2 gramos de peso, ¿cuánto pesa un pan con huevo?

## Nivel intermedio

**6** La señora Peta vende limones a 2 por 1 sol. Si los compra a 3 por 1 sol, ¿cuánto gana por limón?

**7** Una calculadora se ofrece en S/. 45,99 y un celular, en S/. 125,99. Si compro los dos artículos con un billete de S/. 200, ¿cuánto de vuelto me tienen que dar?

**8** Puse dinero en el banco y al mes gané S/. 1,68 de interés. El siguiente mes gané S/. 2,39, pero por los dos meses me cobraron S/. 3,99 por mantenimiento y S/. 0,25 de ITF. ¿Gané o perdí en total, y cuánto?

**9** En cada gota de agua hay 0,0002 litros de este líquido. Si un caño gotea a razón de una gota por segundo, ¿cuánta agua se pierde en un año?

**10** Para comprar tres tarros de leche me faltan S/. 0,45, pero si comprara sólo dos me sobrarían S/. 2,35. ¿Cuánto cuestan 2 tarros de leche?

## Nivel avanzado

**11** Una camisa y un pantalón cuestan S/. 124,59. Si el pantalón cuesta S/. 23,65 más que la camisa, ¿cuánto cuesta el pantalón?

**12** Una pareja de esposos ahorra 450 soles durante 30 días. Si él ahorra diariamente S/. 4,5 más que ella, ¿cuánto ahorra diariamente ella?

**13** Con mis amigos decidimos regalar 20 juguetes a los niños de un albergue. Cada juguete cuesta S/. 4,20. Si dos de mis amigos dieron cada uno S/. 7,5 y cada uno de los restantes dimos S/. 11,5, ¿cuántos amigos somos?

**14** Una cadena de tiendas comerciales pone el precio de sus artículos terminados en 0,99 para redondear al entero más próximo al momento de vender. Si diariamente vende 12 000 artículos en cada una de las 8 tiendas que forman la cadena, ¿cuánto gana al mes por el redondeo?



## Tarea

**1** Cada pastilla pesa 0,100 g y una cápsula pesa 0,140 g más. ¿Cuánto pesan dos cápsulas y una pastilla?

**2** Un litro de Yogurt tiene 32,1 g de carbohidratos. Si la grasa pesa 26,5 g menos que los carbohidratos, ¿cuántos gramos de proteína contiene si esta pesa 0,4 g más que la grasa?

**3** Manuel debía dividir 17,10 entre 0,45 pero por error lo divide entre 0,54. ¿Cuál es el error cometido por Manuel?

**4** Tres personas tienen 50 soles entre todos. Si la primera tiene S/.15,40 y le da 4,5 a la segunda, ésta queda con el triple de lo que tiene la tercera. ¿Cuánto tiene cada una?

# Reforzando - Unidad 5

## Olimpiadas nacionales e internacionales

**1** Zaida gasta un tercio de sus ahorros en comprar una muñeca. ¿Qué parte de sus ahorros le queda?

A) 2/3 B) 1/3 C) 1/4 D) 3/2

**2** Ender tiene S/. 1 500. Si compra un televisor con la mitad y una cocina con la tercera parte del resto, ¿cuánto le queda?

A) S/. 250 B) S/. 350
C) S/. 750 D) S/. 500

**3** En un crucero pueden viajar a lo más 1200 pasajeros. En un puerto se embarcaron 800 pasajeros. ¿Qué parte de la capacidad del crucero falta llenar?

A) 2/5 B) 1/5 C) 1/3 D) 1/6

**4** Aníbal se levanta de madrugada y al ver la hora se percata de que ya ha transcurrido la sexta parte del día. ¿A qué hora se levanta Aníbal?

A) 3 de la mañana B) 4 de la mañana
C) 5 de la mañana D) 6 de la mañana

**5** La mamá de Elvira ha preparado una torta de chocolate para que en el día de su cumpleaños su hija comparta con sus compañeros. La partió en 30 partes iguales y distribuyó dando una porción a cada uno. Cuando terminó de repartir quedó 2/15 de la torta y le repitió a dos de los niños. ¿Qué parte de la torta le quedó?

A) 2/15 B) 1/15 C) 1/30 D) 4/30

**6** Teófilo y Teresa se pusieron a dibujar un dinosaurio cada uno. Teresa tardó las 3/4 partes del tiempo que tardó Teófilo. ¿Qué tiempo demoró Teresa, si cuando ella había terminado, a Teófilo le faltaban todavía 10 minutos para terminar?

A) 20 min B) 30 min
C) 40 min D) 15 min

**7** Santiago va todos los días caminando a la escuela y tarda 40 minutos para llegar. Para volver demora 50 minutos porque es de subida. Si permanece 5 horas en la escuela, ¿qué fracción del tiempo de permanencia en la escuela utiliza para trasladarse diariamente?

A) 1/13 B) 1/5 C) 1/20 D) 3/10

**8** Alejandro gasta los dos tercios de sus ahorros en comprar un reloj. ¿Qué parte de lo que gasta le queda?

A) 2/3 B) 1/3 C) 1/4 D) 1/2

**9** Telma compró estas prendas. ¿Cuánto gastó?

A) S/. 98,50 B) S/. 89,50
C) S/. 100,50 D) S/. 99,50

**10** Andrea pidió que le pesen una sandía, una papaya y un melón. La vendedora verificó que pesaban 4,35 kg, 3,85 y 1,50 kg, respectivamente. Andrea decidió llevar las tres frutas. ¿Cuántos kilogramos de fruta compró?

A) 9,70 B) 8,60 C) 9,50 D) 9,80

**11** Uriel hace el lunes 1/2 de una obra y el , 3/4 del resto. ¿Qué parte de la obra le falta ejecutar?

A) 1/4 B) 1/8 C) 1/6 D) 3/8

**12** ¿Cuántos pedazos de 0,25 metros de cinta se podrá obtener de una cinta que mide 5 metros y medio?

A) 20 B) 21 C) 22 D) 23

**13** Sabina se levanta de madrugada y al ver la hora se percata de que faltan 6 horas para el mediodía. ¿Qué fracción del día le queda a Sabina?

A) 1/4 B) 3/4 C) 1/6 D) 4/12

**14** El profesor de matemáticas planteó un problema a sus alumnos. Un sexto de los alumnos no resolvió el problema, la cuarta parte lo resolvió con algunos errores y los 42 alumnos restantes lo resolvieron correctamente. ¿Cuántos alumnos no pudieron resolver el problema?

A)10 B)12 C)14
D)16 E)18

**15** ¿Cuántas fracciones de la forma: $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}}$ existen, tales que $a \neq b$ y que sean equivalentes a la fracción $\frac{a}{b}$?

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 9

**16** ¿Cuántos valores naturales puede tomar "x", si 24/x es una fracción propia e irreductible, mayor que 3/5?

A) 5 B) 3 C) 4
D) 7 E) 13

**17** Salvador gasta su dinero de la siguiente manera: los 2/3 en alimentos, los 3/7 del resto en pasajes, los 8/35 del resto en ropa y lo que queda, que es S/. 54, los ahorra. Determina qué cantidad de su dinero destina para alimentos.

A) 375 B) 300 C) 245
D) 315 E) 205

**18** Rita tiene S/. 33,30 en monedas de 1 céntimo, de 5 céntimos, de 10 céntimos, de 20 céntimos, de 25 céntimos y de 50 céntimos. Si tiene la misma cantidad de monedas de cada valor, ¿cuántas monedas tiene en total?

A) 24 B) 30 C) 36 D) 42

**19** Regina tiene un par de billetes de S/. 50 y tres de S/. 20. ¿Cuántos soles le faltarán, si compra una blusa de S/. 73,50 y un pantalón que vale S/. 35,80 más que la blusa?

**20** María tiene una botella vacía. Si la llena de agua, todo pesa 650 gramos. Si solo llena de agua las 3/4 partes, todo pesa 525 gramos. ¿Cuánto pesa la botella vacía?

**21** El equipo olímpico matemático que representa al colegio XXY está integrado por estudiantes de los grados tercero, cuarto y quinto de primaria únicamente. Siete estudiantes son de tercero, once estudiantes son de cuarto y una tercera parte (1/3) del equipo es de quinto de primaria. ¿Cuántos estudiantes integran el equipo?

**22** Un atleta recorre cada hora una distancia igual a 3/4 de lo que ha recorrido la hora anterior. Si en tres horas recorrió 74 kilómetros, ¿cuántos kilómetros recorrió durante la primera hora?

**23** Efectúa $\underbrace{\frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \ldots + \frac{1}{100}}_{\text{100 sumandos}} + 100$

**24** Calcula la suma de todas las fracciones irreducibles con denominador 12 comprendidas entre 1/6 y 3/4.

**25** Dos agricultores A y B tienen, respectivamente, 9 y 5 hectáreas de terreno que desean sembrar. Cuando ya habían sembrado los 2/7 de cada propiedad, contratan a un peón, y en adelante los agricultores y el peón trabajan en partes iguales. ¿Cuánto debe aportar cada agricultor para pagar al peón, si en total deben pagarle 140 soles?

# Autoevaluación

1. Everardo debe confeccionar un tapiz en 15 días. Si le faltan los 1/5 del tapiz, ¿cuántos días lleva trabajando?

2. Edgard compra medio kilo de té por S/. 1,70. ¿Cuántos kilogramos compraría con S/. 1 251,20?

3. Una jarra contiene 4 litros de agua. Si se le agrega 2 litros, faltaría llenar los 3/5 de su capacidad. ¿Cuántos litros hay que agregar para que esté lleno en sus 4/5 partes?

4. Zenón tiene S/. 95,60, Sebastián S/. 17,70 menos que Zenón y S/. 35,60 más que Alex. ¿Cuánto tienen los tres juntos?

5. Habíamos explorado en el campo durante 9 días y solo quedaban los 2/5 de nuestra reserva de alimentos. A lo más, ¿cuántos días adicionales podíamos seguir explorando, sin sufrir la falta de alimentos?

6. Alberto compra el medio kilogramo de harina de quinua por S/. 1,80 y vende el kilo en S/. 4,80. ¿Cuánto gana al comercializar 2,45 toneladas?

# 6 La proporcionalidad

Una de las formas más simples de cómo se relacionan matemáticamente las magnitudes es la proporcionalidad directa o inversa, lo cual se expresa en las proporciones.

Enfoque Intercultural

## Orgullosos de nuestra identidad nacional

Somos herederos de una cultura ancestral que nos ha dejado grandes obras (Machu Picchu, Choquequirao, Sillustani, Chan Chan, Chavin de Huantar, ...), proezas históricas de grandes héroes (Pachacutec, Grau, Andrés Avelino Cáceres, Bolognesi, Abelardo Quiñones, ...), variedad de músicas, diversidad de danzas, ... Tanto legado cultural, del cual tenemos razones de sobra para sentirnos orgullosos y comprometidos a esforzarnos para ser merecedores de esta herencia y seguir llevando a lo más alto el nombre de nuestro Perú.

| Resuelve problemas de cantidad (Aritmética) | |
|---|---|
| **Capacidades** | **Desempeños** |
| **Traduce cantidades a expresiones numéricas** | Lee y escribe los números naturales en el sistema decimal y no decimal hasta el noveno orden. |
| **Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones** | Organiza los números naturales por agrupación y representa en el tablero posicional. |
| **Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo** | Usa estrategias para expresar un número en bases diferentes. Resuelve problemas de adición. |
| **Argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones** | Expresa su comprensión del sistema de numeración decimal con números naturales hasta nueve cifras. |

Fracciones

# Razones y proporciones

Esmeralda ha preparado una cena para 18 personas utilizando 2 kg de papa.

La cena estuvo tan agradable que una de las amigas le ha solicitado preparar para su cumpleaños el mismo potaje pero para 90 personas.

VIDEO DE TEORÍA

**Responde:**

¿Cuántos kilogramos de papa utilizará Esmeralda para este pedido? _____

## Razón

Si una persona tiene 50 años y su hijo, 20, podemos decir que el padre es mayor que el hijo en 30 años o que las edades del padre y del hijo son como 5 y 2.

- $50 - 20 = 30$
- $\frac{50}{20} = \frac{5}{2}$

En ambos casos estamos comparando dos edades, mediante una sustracción en el primer caso, y mediante una división en el segundo.

Se llama razón a la comparación de dos cantidades:

**Razón aritmética:** $a - b = r$ ← Valor de la razón

Antecedente: $a$ — Consecuente: $b$

**Razón geométrica:** $\frac{a}{b} = k$ ← Valor de la razón

Antecedente: $a$ — Consecuente: $b$

## Proporción

Cuando dos razones tienen el mismo valor se dice que son equivalentes y se los puede escribir en forma de una igualdad, a la cual se denomina proporción.

- $50 - 20 = 30$
- $40 - 10 = 30$

$\Rightarrow 50 - 20 = 40 - 10$

- $\frac{50}{25} = 2$
- $\frac{12}{6} = 2$

$\Rightarrow \frac{50}{25} = \frac{12}{6}$

**Proporción aritmética.-** Equivalencia de dos razones aritméticas.

$a - b = c - d$

$a$ y $d$ : extremos

$b$ y $c$ : medios

**Proporción geométrica.-** Equivalencia de dos razones geométricas.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$a$ y $d$ : extremos

$b$ y $c$ : medios

**Resolviendo:** (Problema introductorio)

La cantidad de papa y el número de potajes tienen que mantener la proporción.

Sea $x$ la cantidad de papa en kg:

$$\frac{x}{90} = \frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{18}_{\,9}} \Rightarrow x = \frac{90}{9}$$

$$x = 10 \text{ kg}$$

## Clasificación de proporciones

Las proporciones se clasifican de acuerdo a los términos medios. Es **continua** cuando los términos medios son iguales y **discreta** cuando los términos medios son diferentes.

| Proporción aritmética continua | Proporción aritmética discreta | Proporción geométrica continua | Proporción geométrica discreta |
|---|---|---|---|
| $a - b = b - c$ | $a - b = c - d$ | $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ | $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ |
| $b$: media diferencial de $a$ y $c$. | $d$: cuarta diferencial de $a$, $b$ y $c$. | $b$: media proporcional de $a$ y $c$. | $d$: cuarta proporcional de $a$, $b$ y $c$. |
| $c$: tercera diferencial de $a$ y $b$. | | $c$: tercera proporcional de $a$ y $b$. | |

### *Ejemplo 1*

**Completa** las siguientes oraciones:

a) La tercera diferencial de 23 y 18 es: _____

b) La cuarta diferencial de 17; 10 y 15 es: _____

c) La media proporcional de 9 y 4 es: _____

d) La cuarta proporcional de 12; 18 y 16 es: _____

Resuelve problemas de cantidad (Aritmética)

## Propiedades de la proporción geométrica

En la proporción geométrica $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se cumplen las siguientes propiedades:

**1.** $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$

$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ También: $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$

**2.** $\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$

$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ También: $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$

**3.** De las anteriores: $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$ ÷ $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$

Dividiendo miembro a miembro:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

### *Ejemplo 2*

El número de vestidos de Ana y el de Bella se encuentran en la relación de 3 a 2. Si entre las dos tienen 15 vestidos, ¿cuántos tiene cada una?

**Resolviendo:**

Consideremos que Ana tiene $a$ vestidos y Bella, $b$ vestidos:

**Método 1:**

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\overbrace{a+b}^{15}}{b} = \frac{3+2}{2} \Rightarrow \frac{15}{b} = \frac{5}{2} \Rightarrow b = \mathbf{6} \Rightarrow a = 15 - 6 = \mathbf{9}$$

(×3 sobre $\frac{15}{b}$, ×3 bajo $\frac{5}{2}$)

**Método 2:**

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{2} \begin{cases} a = 3k \\ b = 2k \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} 3k + 2k = 15 \\ 5k = 15 \Rightarrow k = 3 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \cdot 3 = \mathbf{9} \\ b = 2 \cdot 3 = \mathbf{6} \end{cases}$$

$\therefore$ Ana tiene 9 vestidos y Bella, 6.

**Ten en cuenta**

Cuando dos cantidades están en la relación, por ejemplo, de 3 a 5 se escribe así:

$\frac{a}{b} = \frac{3}{5} \Rightarrow$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | 6 | 9 | 12 | ... |
| $b$ | 10 | 15 | 20 | ... |

En general:

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{5} \Rightarrow \begin{cases} a = 3k \\ b = 5k \end{cases}$$



GENIOMATIC

## Nivel básico

**1** Maritza tiene 9 años más que Vidal. Si Vidal tiene 10 años, ¿cuántos tiene Maritza?

**2** La edad de Nátaly es media diferencial de 19 y 7 años. ¿Cuántos años tiene?

**3** Lo que tienen Ángel y Bruno forman una razón geométrica de valor 0,7. Si Bruno tiene 20 soles, ¿cuánto tiene Ángel?

**4** Lidia vendió pantalones y chompas en la relación de 5 a 3. Si vendió 12 chompas, ¿cuántos pantalones vendió?

**5** La edad de Nancy es tercera diferencial de 30 y 21 años. ¿Dentro de cuántos años será la cuarta proporcional de 6; 9 y 10?

## Nivel intermedio

**6** En una mezcla de concreto, por cada 5 carretillas de arena entran dos bolsas de cemento. ¿Cuántas carretillas de arena son necesarias para mezclar 60 bolsas de cemento?

**7** Las edades de tres hermanos forman una proporción geométrica continua. El segundo cumple 18 años y la suma de las edades de los dos menores es 27 años. ¿Qué edad tiene el mayor?

**8** La razón entre las edades de dos hermanos es 2/5. Si uno es 9 años menor que el otro, ¿qué edad tiene el menor?

**9** Jhon tenía 12 años cuando nació Max. Actualmente sus edades están en la relación de 3 a 7. ¿Qué edad tiene el mayor?

**10** En una reunión hay 24 hombres y 18 mujeres. Cuando se retira un grupo de hombres, quedan 5 hombres por cada 9 mujeres. ¿Cuántos hombres se retiraron?

## Nivel avanzado

**11** Ernesto vende televisores. Su regla es que si en la mañana vende un número de televisores como 5, en la tarde vende tantos como 9. Si una mañana vendió 15 televisores, ¿cuál será su venta del día?

**12** Para hacer un regalo a mamá, dos hermanos reunieron 180 soles aportando cantidades que tienen una relación de 5 a 4. ¿Cuánto aportó cada uno?

**13** Aníbal debe caminar una distancia de 600 metros. Cuando ha recorrido una distancia como 5 le falta recorrer una distancia como 7. Si recorre 50 metros más, ¿cuántos metros le faltarán para llegar a su destino?

**14** Al ir al cine, lo que gasté es a lo que me queda como 5 a 3. Si de lo que me queda ahorro la sexta parte, me queda 150 soles. ¿Cuánto tenía inicialmente?

## Tarea

**1** La edad de Pedro es tercera diferencial de 27 y 19. ¿Qué edad tendrá dentro de 5 años?

**2** Marcos distribuyó naranjas en 4 canastas en cantidades que forman una proporción geométrica. Si en las tres primeras hay 12; 15 y 16; ¿cuántas hay en la cuarta canasta?

**3** Entre César y Thalía han reunido 160 soles. Si sus partes guardan una relación de 5 a 3, ¿cuánto más que Thalía reunió César?

**4** Los extremos de una proporción geométrica discreta son 21 y 20. El valor de la razón es 3/5. **Halla** la suma de los medios.

# Serie de razones geométricas equivalentes

Proporciones

Una empresa presta servicios de alimentación a un contratista que tiene tres obras con 40; 60 y 70 trabajadores distribuidos en tres campamentos.

La empresa compra diariamente 340 panes para distribuir en los tres campamentos.

VIDEO DE TEORÍA

**Responde:**

Considerando que la ración de pan por trabajador es la misma, ¿cuántos panes asigna a cada uno campamento?

Varias razones geométricas del mismo valor forman una serie de razones geométricas equivalentes.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$$ ← Constante de proporcionalidad

**Resolviendo:** (Problema introductorio)

Sean $a$, $b$ y $c$ la cantidad de panes que asigna a los campamentos.

La ración de pan se calcula dividiendo la cantidad de panes entre el número de personas y esta ración es la misma en los tres campamentos, entonces: $\frac{a}{40} = \frac{b}{60} = \frac{c}{70} = \frac{340}{40 + 60 + 70} = 2$

Entonces la ración es de 2 panes por persona, de donde:

$\therefore\ a = 2\times40 = 80 \qquad b = 2\times60 = 120 \qquad c = 2\times70 = 140$

## Propiedad de la serie de razones

En toda serie de razones, la suma de los antecedentes es a la de consecuentes como cada antecedente es a su respectivo consecuente.

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$ entonces se cumple: $\frac{a + c + e}{b + d + f} = k = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$

### *Ejemplo 1*

En una serie de tres razones geométricas equivalentes, los consecuentes son 4; 5 y 8. Si la suma de los antecedentes es 68, **determina** cada uno de los antecedentes.

**Resolviendo:**

Sea: $\frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{8} = k$

Aplicando la propiedad: $\frac{\overbrace{a + c + e}^{68}}{\underbrace{4 + 5 + 8}_{17}} = k = \frac{a}{4} = \frac{c}{5} = \frac{e}{8} \Rightarrow k = 4 \Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{8} = 4 \begin{cases} a = 16 \\ b = 20 \\ c = 32 \end{cases}$

**Ten en cuenta**

**Serie de razones geométricas continuas**

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$$

Ejemplo: $\frac{24}{12} = \frac{12}{6} = \frac{6}{3} = 2$

En toda serie de razones geométricas cada razón es igual a la constante de proporcionalidad, en consecuencia, cada antecedente es igual a su respectivo consecuente por la constante de proporcionalidad.

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$

Entonces:

$\frac{a}{b} = k \Rightarrow a = bk$

$\frac{c}{d} = k \Rightarrow c = dk$

$\frac{e}{f} = k \Rightarrow e = fk$

### *Ejemplo 2*

Andrea, Brad y Cosme ganaron un premio de 450 soles en un concurso de Matemáticas y se lo repartieron proporcionalmente al número de problemas resueltos por cada uno. Si Andrea resolvió 15 problemas, Brad, 12 problemas y Cosme, 18, ¿cuánto recibió cda uno?

**Resolviendo:**

Sean $a$, $b$ y $c$, respectivamente, el número de problemas resueltos por cada uno, entonces:

• $a = 15k$ • $b = 12k$ • $c = 18k$

Donde: $15k + 12k + 18k = 450$

$45k = 450 \Rightarrow k = 10$

Entonces:

Andrea recibió: $a = 15 \cdot 10 =$ 150 problemas.

Brad recibió: $b = 12 \cdot 10 =$ 120 problemas.

Cosme recibió: $c = 18 \cdot 10 =$ 180 problemas.

### *Ejemplo 3*

Tres empresarios invirtieron en un negocio 40 mil; 45 mil y 60 mil soles. Después de un ejercicio financiero se repartieron las utilidades proporcionalmente a los capitales invertidos. Si a los dos primeros les correspondió 51 mil soles, ¿cuál fue la utilidad y cuánto recibió el tercero?

**Resolviendo:**

• Sean $a$, $b$ y $c$, las utilidades recibidas,

entonces: $\frac{a}{\cancel{40}^{8}} = \frac{b}{\cancel{45}^{9}} = \frac{c}{\cancel{60}^{12}}$

• Por propiedad: $\frac{a+b+c}{8+9+12} = \overbrace{\frac{a+b}{8+9}}^{51} = \frac{c}{12}$

$$\frac{a+b+c}{\underbrace{29}_{17}} = 3 = \frac{c}{12}$$

De donde: • $a + b + c = 29 \cdot 3 = 87$

• $c = 12 \cdot 3 = 36$

∴ La utilidad fue de 87 mil y el tercero recibió 36 mil soles.

## Nivel básico

**1** ¿Cuál de las siguientes razones no puede formar parte de la serie $\frac{9}{6} = \frac{12}{8} = \frac{6}{4}$?

A) $\frac{15}{10}$ B) $\frac{18}{15}$ C) $\frac{21}{14}$

**2** ¿Cuál de las siguientes relaciones no puede aplicarse en: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$?

A) $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c+e}{d+f} = k$

B) $\frac{a+c-e}{b+d-f} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$

C) $\frac{ace}{bdf} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$

**3** En una serie de tres razones geométricas equivalentes, los consecuentes son 5; 8 y 11. Para determinar los antecedentes, es suficiente:

I. Conocer uno de los antecedentes.
II. El valor de la constante de proporcionalidad.
III. La suma de los antecedentes.

**4** Con las siguientes razones se forma una serie. ¿Cuál de las razones no se debe incluir?

A) $\frac{15}{30}$ B) $\frac{12}{24}$ C) $\frac{6}{12}$ D) $\frac{13}{24}$ E) $\frac{14}{28}$

**5** Se distribuye 126 alumnos de sexto grado en las secciones A, B y C en forma proporcional a 13; 14 y 15, respectivamente. ¿Con cuántos alumnos resulta cada sección?

**8** Las cantidades de caramelos que hay en tres cajas están en la relación de 4; 7 y 13. Se extrae 20 caramelos de la última para repartirlos entre las otras dos cajas a fin de que todas tengan igual número de caramelos. ¿Cuántos hay en total?

## Nivel intermedio

**6** Ofelia tiene bolillas verdes, rojas y azules en la proporción de 2; 3 y 5, respectivamente. Si en total tiene 30 bolillas, ¿cuántas tiene de cada color?

**9** Tres amigos tienen cantidades proporcionales a 8; 3 y 7. Para que todos tengan igual suma, el que tiene menos dinero recibe 42 del que tiene más y cierta cantidad del tercero. ¿Cuánto recibió del tercero?

**7** Las dimensiones de un ladrillo son proporcionales a 4; 3 y 2. Si el volumen es 192 $cm^3$, ¿cuáles son las dimensiones del ladrillo?

**10** Tres toneles contienen vino en cantidades proporcionales a 5; 6 y 8. Cuando se extrae 10 litros de vino de cada tonel, los volúmenes que quedan resultan proporcionales a 5; 7 y 11, respectivamente. ¿Qué cantidad de vino había en los tres toneles?

## Nivel avanzado

**11** En mi colegio hay igual número de alumnos en cuarto, quinto y sexto grado; pero los varones de cada grado son proporcionales a 4; 6 y 7, respectivamente. Si hay 20 mujeres en cuarto grado y 14 mujeres en quinto grado, ¿cuántas mujeres hay en sexto grado?

**12** Tres recipientes contienen la misma cantidad de agua. Al primero se le agrega 12 litros, al segundo, 18 litros y al tercero hasta llenarlo, de modo que los contenidos resultan proporcionales a 7; 9 y 10, respectivamente. ¿Cuál es la capacidad del tercer recipiente y cuántos litros contenía cada recipiente al principio?

**13** Andy compró 3 cajitas de fósforos. De la primera cajita sacó 12 palillos, de la segunda, 16 y de la tercera cierta cantidad, de modo que quedaron cantidades proporcionales a 7; 6 y 9, respectivamente. ¿Cuántos palillos contiene una cajita fósforos y cuánto sacó de la tercera cajita?

**14** Se tienen 3 toneles de vino con cantidades proporcionales a 6; 7 y 11. Si del tonel que tiene más vino se sacan 12 litros para redistribuirlos en los otros dos toneles a fin de que los tres posean la misma cantidad de vino, ¿cuántos litros de vino hay en total?

## Tarea

**1** Las edades de tres hermanos son como 3; 7 y 13. Hace 4 años las edades de los dos menores se diferenciaban en 8. ¿Cuál es la edad del mayor?

**2** Tres cantidades son proporcionales a 4; 5 y 7. Si las dos menores suman 36, **halla** la mayor de las cantidades.

**3** Un día ingresaron al cine 459 personas y se observa que por cada 4 adultos hay 3 ancianos y 2 niños. ¿Cuántos niños asistien?

**4** En un corral, por cada 3 gallinas hay 2 patos y por cada 6 patos hay 7 pollos. Si en total hay 154 aves, ¿cuántas gallinas hay?

Serie de razones

# Magnitudes proporcionales

Un diario local ha informado que el precio del metro cuadrado de terreno varía en forma directamente proporcional a la distancia del centro de la ciudad al terreno. Jorge ha encontrado un terreno de 120 soles el $m^2$ ubicado a 5 km de la ciudad.

VIDEO DE TEORÍA

**Responde:**

Matilde quiere comprar un lote de 160 $m^2$ a 4 km de la ciudad. De ser cierta la información,

¿cuánto le costará el lote? _____

**Magnitud**

Es todo aquello cuya intensidad o extensión puede aumentar o disminuir y puede ser medido. Lo que se obtiene de la medición se llama valor de la magnitud. Son ejemplos de magnitud, la temperatura, el tiempo, la longitud, el peso, etc.

Las magnitudes están relacionadas matemáticamente de diversas maneras. En este capítulo vamos a estudiar dos de esas relaciones.

## 1. Magnitudes directamente proporcionales

Si una manzana cuesta S/. 2, dos manzanas cuestan S/. 4; tres manzanas cuestan S/. 6, y así sucesivamente.

Con estos valores hagamos una tabla:

| N° Manzanas | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| Precio (S/.) | 2 | 4 | 6 | 8 | ... |

Se observa que al duplicar, triplicar o cuadruplicar el número de manzanas el precio también se duplica, triplica o cuadruplica, respectivamente. Además, el cociente de cada pareja de valores correspondientes es una constante: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = 0{,}5$

El precio es D.P. al número de manzanas. Si dos magnitudes son directamente proporcionales, al dividir los valores correspondientes, los cocientes resultan iguales:

Si $A$ D.P. $B \Rightarrow \frac{A}{B} = k$

**Resolviendo:** (Problema introductorio)

Precio (P) directamente proporcional a la distancia (D) $\Rightarrow \frac{P}{D} = k$

Según los datos:

| P (S/.) | 120 | $x$ |
|---|---|---|
| D (km) | 5 | 4 |

$\Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{120}{5} \Rightarrow x = 4 \cdot 24 = 96$

Cada metro cuadrado le costará S/. 96 a Matilde, entonces 160 $m^2$ le costará: $160 \cdot 96 =$ 15 360 soles.

## 2. Magnitudes inversamente proporcionales

Si un pintor demora 60 días en pintar las paredes de un colegio, 2 pintores tardarían 30 días; 3 pintores, 20 días; 4 pintores, 15 días, etc. Véase la tabla.

| N° pintores | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| Tiempo en días | 60 | 30 | 20 | 15 | ... |

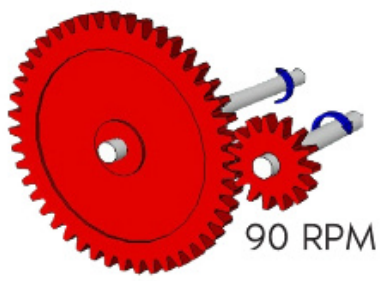
Se observa que al duplicar, triplicar, el número de pintores el tiempo se reduce a la mitad, a la tercera parte, respectivamente. Además, el producto de cada pareja de valores correspondientes es una constante: $1 \cdot 60 = 2 \cdot 30 = 3 \cdot 20 = 4 \cdot 15 = 60$

El tiempo de pintado es inversamente proporcional al número de pintores. Si dos magnitudes son inversamente proporcionales, el producto de los valores correspondientes es constante.

Si $A$ I.P. $B \Rightarrow AB = k$

***Ejemplo***

Dos piñones de 45 y 16 dientes están engranados como muestra la figura. Si el pequeño gira a 90 revoluciones por minuto (RPM), ¿a qué velocidad gira el grande?




**Resolviendo:**

Elaboramos una tabla con los datos:

| | N° dientes | Velocidad |
|---|---|---|
| Piñón grande | 45 | $x$ |
| Piñón pequeño | 16 | 90 |

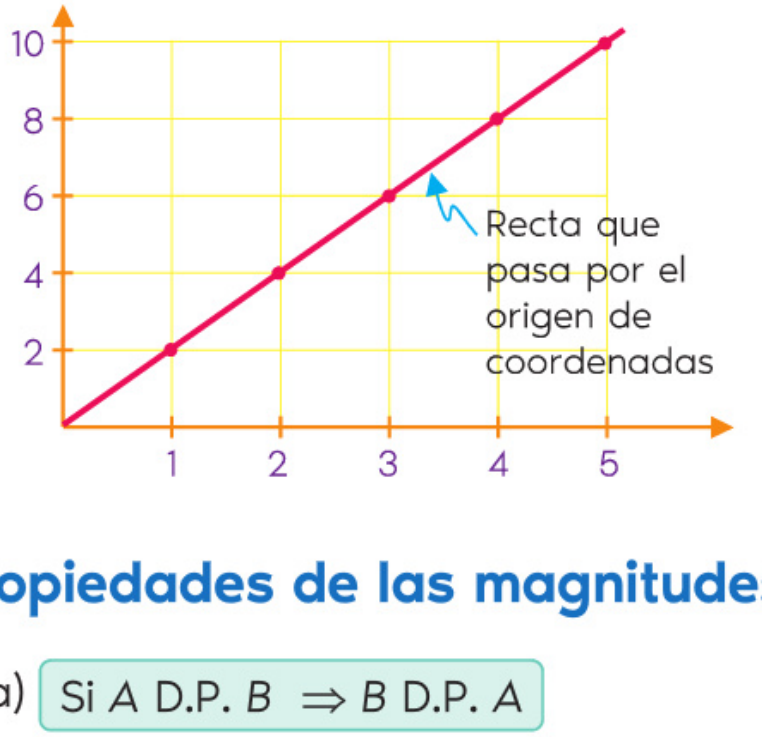
A mayor número de dientes, el piñón gira más despacio, esto es, el número de dientes y la velocidad de giro son inversamente proporcionales, entonces:

$$\underset{1}{\cancel{45}}x = 16 \times \underset{2}{\cancel{90}} \Rightarrow x = 32 \text{ RPM}$$

## 3. Gráficos de magnitudes proporcionales

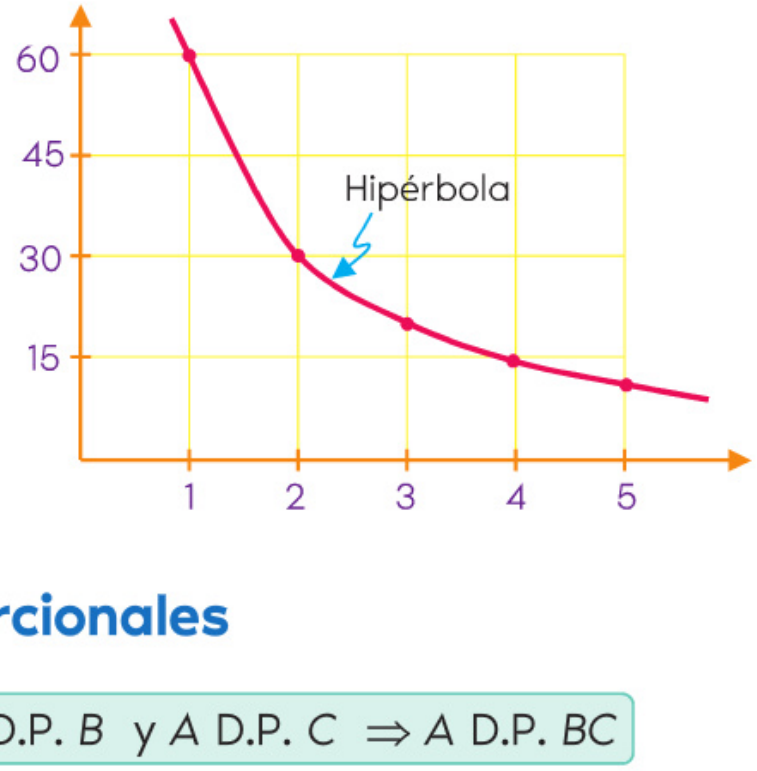
**a)** Gráfico de dos magnitudes directamente proporcionales.

| N° Manzanas | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| Precio (S/.) | 2 | 4 | 6 | 8 | ... |




**b)** Gráfico de dos magnitudes inversamente proporcionales.

| N° pintores | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| Tiempo en días | 60 | 30 | 20 | 15 | ... |




## 4. Propiedades de las magnitudes proporcionales

a) Si $A$ D.P. $B \Rightarrow B$ D.P. $A$

b) Si $A$ I.P. $B \Rightarrow A$ D.P. $1/B$

c) Si $A$ D.P. $B$ y $A$ D.P. $C \Rightarrow A$ D.P. $BC$

d) Si $A$ D.P. $B \Rightarrow A^n$ D.P. $B^n$

## Nivel básico

**1** **Completa** el cuadro sabiendo que A es D.P. a B y que C es I.P. a D.

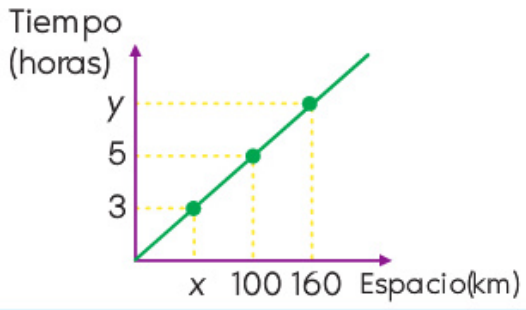
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 6 | | 10 | | 18 |
| B | 15 | 20 | | 40 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| C | 2 | 3 | | 12 | |
| D | 24 | | 8 | | 1 |

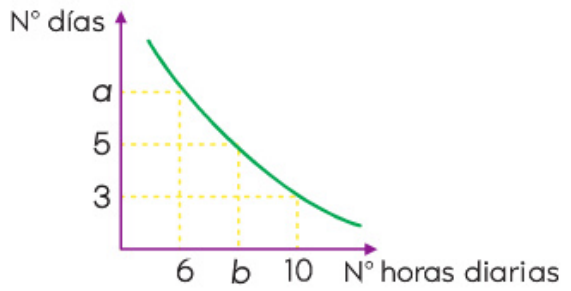
**2** Si 14 cuadernos cuestan S/. 30, ¿cuánto cuestan 35 cuadernos?

**3** El omnibus TUCSA tarda 9 horas en ir de Lima a Huancayo, si va a 40 km/h. ¿Qué tiempo se demora si va a 60 km/h?

**4** Del gráfico, **halla** $x$ e $y$.




**5** Del gráfico, **halla** $a \times b$.




## Nivel intermedio

**6** Para preparar 40 kekes se necesitan 2500 gramos de harina. ¿Cuántos gramos de harina se necesitan para elaborar 3 docenas de kekes?

**7** Dos atletas demoran 20 y 28 minutos en recorrer la misma distancia. ¿Cuál es la velocidad del más veloz si el otro tiene una velocidad de 40 km/m?

**8** Andrés tarda 9 horas en pintar un muro rectangular de 5 m de largo por 3 m de ancho. ¿Cuánto tardaría en pintar un muro cuadrado de 5 metros de lado?

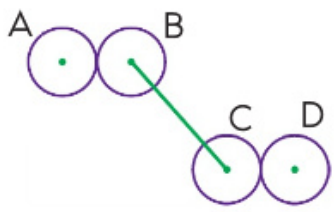
**9** Apenas se inicia la lluvia, se pone en el patio un recipiente cilíndrico seco y se observa que la altura del agua crece proporcionalmente al tiempo. En 3 horas de lluvia alcanzó 12 mm. En 2 horas más de lluvia, ¿qué altura alcanzará?

**10** Un árbol crece directamente proporcional al tiempo. En abril tenía 12 m, en diciembre del mismo año ya tenía 14 m. ¿Qué altura alcanzará en diciembre del siguiente año?

## Nivel avanzado

**11** Una naranja de 10 cm de diámetro pesa 200 gramos. ¿Cuánto pesa una naranja de 12 cm de diámetro?

**12** Si las ruedas A, B, C y D tienen 15; 25; 50 y 60 dientes, respectivamente.




¿Cuántas vueltas da D si A da 10 vueltas?

**13** El sueldo de un empleado es D.P. a su eficiencia e inversamente proporcional a su edad. Don Miguel gana S/. 1200, siendo su eficiencia el 80% y su edad 40 años. ¿Cuánto ganará Don Eder si es 10 años más joven y tiene 100% de eficiencia?

**14** El ahorro mensual de una persona es inversamente proporcional a su gasto, pero directamente proporcional a su sueldo. Nataly y Jéssica trabajan en una misma empresa pero Nataly ahorra S/. 100 mensualmente y su sueldo es de S/. 800. ¿Cuánto ahorra Jéssica si su sueldo es S/. 600 pero el gasto de Nataly y Jéssica son como 5 y 3, respectivamente?

## Tarea

**1** **Escribe** 4 ejemplos de pares de magnitudes directamente proporcionales.

**2** **Escribe** 4 ejemplos de pares de magnitudes inversamente proporcionales.

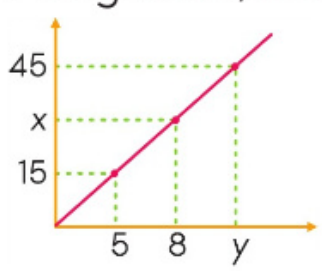
**3** Si A es D.P. a B, **completa** la tabla.

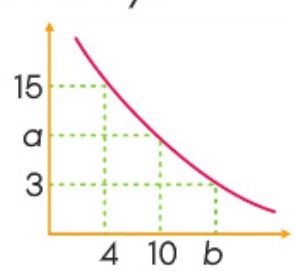
| A | 5 | 10 | | 34 | |
|---|---|---|---|---|---|
| B | 6 | | 24 | | 48 |

**4** Si A I.P. a B, **completa** la tabla.

| A | 3 | 4 | | 12 | |
|---|---|---|---|---|---|
| B | 24 | | 8 | | 1 |

**5** De los gráficos, **halla** $a + x + b + y$.








GENIOMATIC

# Reforzando - Unidad 6

## Olimpiadas nacionales e internacionales

**1** Emilia tarda 2 minutos en recorrer una cuadra. ¿Cuántas cuadras recorre en 6 minutos?

A) 2 B) 3 C) 6 D) 12

**2** En la casa de Viviana viven 3 adultos por cada 2 niños. Cuando se reúnen todos son 10 personas. ¿Cuántos son niños?

A) 4 B) 6 C) 4 D) 3

**3** Para preparar una torta, Ángela mezcla 3 cucharadas de azúcar por cada 200 gramos de harina. Si la torta requiere de 1 kilogramo de harina, ¿cuántas cucharadas de azúcar debe utilizar?

A) 10 B) 12 C) 15 D) 18

**4** En la Bahía de Paracas se observan gaviotas y parihuanas en la razón de 5 a 3. Si hay 57 parihuanas, ¿cuántas gaviotas hay?

A) 95 B) 85 C) 152 D) 105

**5** La razón entre el número de monedas de S/. 5 que tiene León y el número de monedas de S/. 2 de Frida es 6/5. Si León tiene S/. 120, ¿cuánto tiene Frida?

A) S/. 20 B) S/. 30
C) S/. 40 D) S/. 10

**6** Tomás y su hijo caminan en línea recta, conversando. Para equiparar 4 pasos de Tomás su hijo da 5 pasos. Cuando han dado 288 pasos entre los dos se detienen. ¿Cuántos pasos más que el padre ha dado el hijo?

A) 64 B) 36 C) 32 D) 160

**7** Las edades actuales de Aldo y su hijo están en la relación de 7 a 2. Si cuando Aldo tenía 30 años su hijo tenía 5. ¿Cuántos años tiene el hijo?

A) 10 años B) 5 años
C) 8 años D) 6 años

**8** La relación entre dos números es como de 3 a 4. ¿Cuáles son los números si suman 35?

A) 10 y 25 B) 11 y 24
C) 12 y 16 D) 15 y 20

**9** Dos individuos arriendan una finca. El primero ocupa los 5/11 de la finca y paga S/. 6 000 de alquiler al año. ¿Cuánto paga de alquiler anual el segundo?

A) S/. 7200 B) S/. 7000
C) S/. 6500 D) S/. 6800

**10** Arnaldo y Efraín quieren hacer un negocio. Para la inversión, Arnaldo está dispuesto a poner 8 soles por cada 5 soles que ponga Efraín. Si necesitan un capital de 5850 soles, ¿cuánto tendría que poner Arnaldo?

A) S/. 3500 B) S/. 3450
C) S/. 3200 D) S/. 3600

**11** En un bus urbano viajan 32 hombres y 28 mujeres. Por cada 3 hombres que bajan del bus, bajan dos mujeres. Cuando quedan 10 mujeres en el bus, ¿cuántos hombres quedan?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 8

**12** Tres socios retiraron su capital y su ganancia al disolverse la sociedad. El primero retiró S/. 72 800, el segundo S/. 52 000 y el tercero S/. 41 600. Si la ganancia fue S/. 6 400, calcular el capital menor.

A) S/. 60 000 B) S/. 50 000
C) S/. 70 000 D) S/. 40 000

**13** Las magnitudes A, B y C que intervienen en un fenómeno varían de la siguiente forma:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 2 | 3 | 4 |
| B | 144 | 72 | 48 | 36 |
| C | 6 | 12 | 18 | 24 |

Calcula C cuando B = 18.

A) 3 B) 64 C) 54
D) 27 E) 48

**14** Los precios de un carrito y un peluche están en la razón de 3 a 4. Si el par de peluches vale S/. 24, ¿cuánto se pagará por 5 docenas y media de carritos?

A) S/. 480 B) S/. 594
C) S/. 580 D) S/. 598

**15** El menor de dos números es 125. Si la relación entre ambos es de 25/35, ¿cuál es el mayor?

A) 175 B) 150
C) 145 D) 135

**16** Tres llaves abastecen un reservorio de agua. Por cada 5 litros que arroja la primera llave, la segunda arroja 7 y la tercera, 8. Se abren las tres llaves a la vez y el reservorio se llena cuando la primera llave ha abastecido 145 cubos. ¿Cuál es la capacidad del reservorio, en metros cúbicos?

A) 560 B) 570
C) 580 D) 610

**17** En una avenida se han plantado 143 árboles entre sauces y cipreses. Por cada 5 sauces hay 6 cipreses. ¿Cuál es la diferencia entre el número de árboles de cada especie?

A) 13 B) 12 C) 11 D) 14

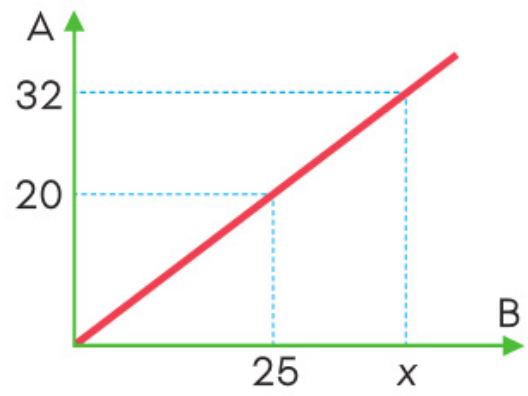
**18** Los precios de un carrito y un peluche están en la razón de 3 a 4. Si el par de peluches vale S/. 36, ¿cuánto se pagará por 5 ½ docenas de carritos?

**19** Los soles que tienen Elmer y Edgard están en la razón de 5 a 8. Si Edgard tiene S/. 126 más que Elmer, ¿cuánto le quedará a Edgard si compra una casaca de S/. 186?

**20** La razón de los precios de una refrigeradora y de un televisor es de 5 a 3. Si la diferencia de los precios es S/. 342, ¿cuánto se necesita para comprar un par de refrigeradoras?

**21** Bernardo compró 8 chirimoyas por cada 13 mangos. Si compró 560 mangos más que chirimoyas, ¿cuántas frutas compró en total?

**22** Se han graficado los valores de dos magnitudes proporcionales. ¿Cuál es el valor de $x$?




**23** Los hermanos Santos, Roger y Milagros recibieron una herencia del abuelo David y se repartieron proporcionalmente al números de sus hijos, que son 2; 4 y 5, respectivamente. Si Santos recibió 12 mil soles:
¿Cuánto recibió Roger?
¿Cuánto recibió Milagros?
¿Cuál es el monto de la herencia?

Supóngase que una vez repartida la herencia deciden repartirse en partes iguales. ¿Cómo harían para cumplir con la decisión?

**24** Lucio reparte S/. 4 875 entre Rubén, Morán y Estela, en partes directamente proporcionales a 4; 5 y 6, respectivamente. ¿Cuánto recibió cada uno?

# Autoevaluación

1. Entre Erick y Marco se deben repartir S/. 1 920 en cantidades cuya razón es como de 3 a 5. ¿Cuánto más que Erick recibe Marco?

2. Las edades de Mario, Gabriel y Dina son 9; 17 y 21 años, respectivamente. ¿En qué relación estarán sus edades dentro de 3 años?

3. Maritza, Pamela y José compraron un fundo en S/. 556 200. Dos años después lo vendieron en S/. 829 500. Si sus aportes fueron directamente proporcionales a 14 ; 9 y 7, respectivamente, ¿cuánto recibió cada uno?

4. Cada vez que Franco apuesta 5 soles en un juego pierde dos soles. Aun así apostó 35 soles en el mismo juego y volvió a cumplirse la regla. ¿Cuánto perdió?

5. Dos magnitudes A y B son directamente proporcionales. Para A = 12, se hace una medición de B y resulta 20. Se aumenta A en 9 unidades y se vuelve a medir B. ¿Cuál será el resultado?

6. En una reunión se hallan 105 varones y 135 damas. En cierto momento se retiran igual número de varones y damas, siendo la razón de varones a damas que quedan como de 3 a 5. ¿Cuántas personas se retiraron?

# 7 Regla de tres y tanto por ciento

La regla de tres es una estrategia que nos ayuda a resolver problemas de proporcionalidad y el tanto por ciento tiene mucha importancia en los cálculos de la actividad comercial y financiera.

Enfoque de atención a la diversidad

## Tenemos derecho a la educación

En el Perú existen 72 lenguas, existen diferencias culturales, hay muchas etnias, distintas costumbres, pero todos somos hermanos de una sola nación, tenemos el mismo derecho y deber de engrandecerla, pero para ello debemos educarnos todos en igualdad de condiciones, respetando las diferencias culturales, sociales, étnicas, religiosas, de género, condición de discapacidad o estilos de aprendizaje.

| Resuelve problemas de cantidad (Aritmética) | |
|---|---|
| **Capacidades** | **Desempeños** |
| **Traduce cantidades a expresiones numéricas** | Interpreta el tanto por ciento como la unidad dividida en 100 partes iguales. |
| **Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones** | Establece la diferencia entre la proporcionalidad directa e inversa. |
| **Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo** | Emplea el tanto por ciento para resolver problemas comerciales y financieros. |
| **Argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones** | Demuestra las fórmulas de interés simple. |

# Regla de tres

Magnitudes proporcionales

Rodrigo tiene un auto en el que fue de paseo a un lugar que dista de su casa 90 kilómetros, utilizando 4 galones de gasolina en la ida y la vuelta.

Su movilidad tiene un tanque con capacidad para 12 galones.

VIDEO DE TEORÍA

**Responde:**

¿Para cuántos kilómetros de recorrido le alcanza un tanque lleno? _____

La regla de tres es una aplicación de las magnitudes proporcionales, esto implica que solo se aplica cuando las magnitudes son proporcionales.

Consiste en calcular un valor desconocido de una magnitud mediante la comparación de dos o más magnitudes proporcionales.

**Clasificación:**

Regla de tres { Simple { Directa / Inversa ; Compuesta

## 1. Regla de tres simple directa

Fabián puede fabricar 126 mesas en una semana contratando 21 carpinteros. Si tiene un pedido de 150 mesas para entregar en una semana, ¿cuántos carpinteros debe asignar para la tarea?

| Magnitudes: | N° mesas | N° carpinteros |
|---|---|---|
| | 126 | 21 |
| | 150 | $x$ |

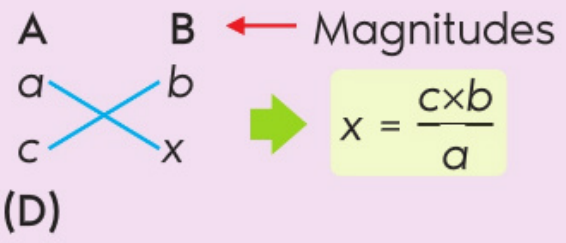
**Comparamos:**

Más carpinteros hacen más mesas, entonces N° de mesas y N° de carpinteros son D.P., luego, el cociente de sus valores correspondientes es constante:

$$\frac{x}{150} = \frac{21}{126} \Rightarrow x = \frac{21\times150}{126} = 25$$

∴ Debe asignar 25 carpinteros.

**Esquema de la regla de tres simple directa**




**Regla práctica:**

La incógnita $x$ es igual al producto de los términos en la diagonal que no la contiene entre el término diagonalmente opuesto.

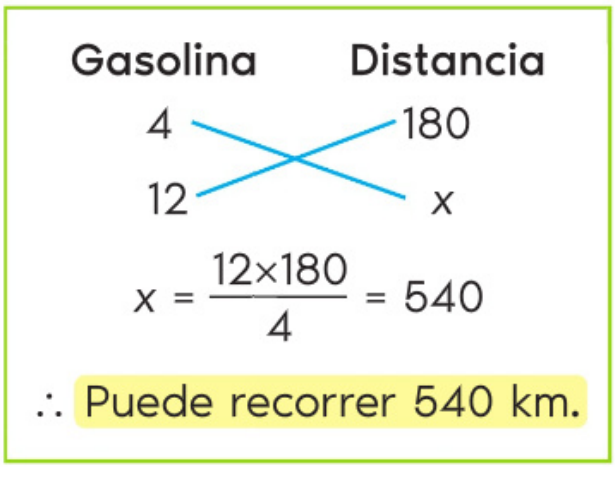
**Resolviendo:** (Problema introductorio)

Como es ida y vuelta, 4 galones le rinde para 90×2 = 180 km.

Un tanque lleno equivale a 12 galones de gasolina.

**Comparamos:**

Más gasolina alcanza para más distancia. La cantidad de gasolina y la distancia son D.P., entonces aplicamos la regla de tres simple directa.




∴ Puede recorrer 540 km.

## 2. Regla de tres simple inversa

Un contratista se ha comprometido a construir una casa en 35 días con 20 albañiles, pero el contratante quiere su casa en 28 días. ¿Cuántos albañiles más debe contratar?

| Magnitudes: | N° días | N° albañiles |
|---|---|---|
| | 35 | 20 |
| | 28 | $x$ |

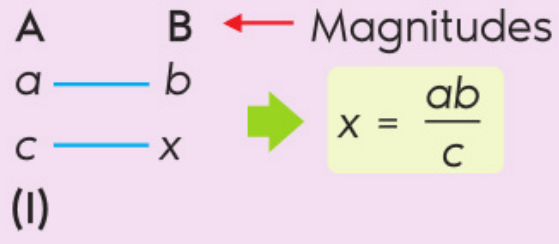
**Comparamos:**

Más albañiles tardan menos días, entonces N° de albañiles y N° de días son I.P., luego el producto de sus valores correspondientes es constante:

$$28x = 35\times20 \Rightarrow x = \frac{35\times20}{28} = 25$$

$\therefore$ Debe asignar 25 – 20 = 5 albañiles más.

**Esquema de la regla de tres simple inversa**




**Regla práctica:**

La incógnita $x$ es igual al producto de los términos en la línea horizontal que no la contiene entre el término opuesto a ella.

## 3. Regla de tres compuesta

Sesenta albañiles, trabajando 8 horas diarias, pueden construir un edificio de 5 pisos en 90 días. ¿Cuántos albañiles, doblemente eficientes que los anteriores se necesitan para construir un edificio de 8 pisos en 4 meses, trabajando 6 horas diarias?

Resuelve problemas de cantidad (Aritmética)

### 1°. Ordenamos los datos:

Magnitud de comparación

| N° pisos | N° albañiles | Eficiencia | h/d | N° días |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 60 | 1 | 8 | 90 |
| 8 | $x$ | 2 | 6 | 120 |
| (D) | | (I) | (I) | (I) |

### 2°. Comparamos la magnitud de comparación con cada una de las demás:

- Más albañiles construyen más pisos (D).
- Cuanto más eficientes son los albañiles se necesitan menos de ellos (I).
- Trabajando más horas por día se requieren menos albañiles (I).
- Más albañiles demoran menos días (I).

### 3°. Cálculo de la incógnita:

La incógnita es igual al valor que la acompaña multiplicada por los cocientes de los datos de la misma vertical, en el mismo sentido (de arriba hacia abajo), si son inversamente proporcionales, y en forma invertida si son directamente proporcionales.

$$x = 60\times\frac{8}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{8}{6}\times\frac{90}{120}$$

$$x = \cancel{60}^{1}\times\frac{8}{\cancel{5}}\times\frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{8}{6}\times\frac{\cancel{90}}{\cancel{120}_{2}}$$

$$x = \frac{\overset{2}{\cancel{8}}\times8\times\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{1}{\cancel{12}_{\cancel{3}}}} = 48$$

$\therefore$ Se necesitan 48 albañiles

***Ejemplo***

Daniel planificó una salida al campo por 6 días con su esposa y sus dos hijos. A última hora se sumaron dos sobrinos y ya no pudieron incrementar los víveres. Consumiendo cada persona la ración planificada, ¿cuántos días podrán permanecer en el campo?

**Resolviendo:**

Si son 4 personas dura 6 días.

Si son 6 personas dura $x$ días.

(I)

$$\therefore\ x = \frac{4\times6}{6} = 4 \text{ días}$$

## Nivel básico

**1** Una secretaria tipea 40 páginas en 6 horas. ¿Cuántas páginas tipea en 15 horas?

**2** Un auto llega a la ciudad en 8 horas a la velocidad de 75 kilómetros por hora. Si disminuye su velocidad en 15 km/h, ¿qué tiempo demora?

**3** Por el transporte de 8400 kilogramos de carga se cobra $x$ soles. Por el transporte de 3600 kilogramos de carga se cobra 200 soles menos. ¿Cuál es el valor de $x$?

**4** Si 8 obreros pueden hacer una obra en 15 días, trabajando 6 horas diarias, ¿en cuántos días pueden hacer la obra 9 obreros trabajando 8 horas diarias?

**5** Miguel hace los 2/5 de una obra en 12 días. ¿En qué tiempo hará los 5/9 de lo que falta de la obra?

## Nivel intermedio

**6** La cantidad de gasolina que tiene un auto al partir es igual a los 5/8 de la capacidad del tanque. Si después de recorrer 15 km le quedan los 7/12 del tanque, ¿cuántos kilómetros puede recorrer con el tanque lleno?

**7** Treinta obreros pueden abrir una zanja de 45 m de largo, 2 m de ancho y 1 m de profundidad, trabajando 8 horas diarias durante 15 días. ¿Cuántos obreros serán necesarios para que en 25 días, trabajando 6 horas diarias, abran una zanja de 30 m de largo, 1 m de ancho y 1,5 m de profundidad?

**8** Para transportar 39 toneladas, una distancia de 48 km, se cobra 1500 soles. ¿Cuánto se cobrará por transportar 65 toneladas una distancia de 60 km?

**9** Quince obreros pueden hacer una obra en 20 días. Si empiezan la obra trabajando juntos y al cabo de 4 días se retiran 5 obreros, ¿con cuántos días de retraso entregarán la obra?

**10** Para determinar el número de peces que hay en un estanque, se echan en él 450 peces marcados y se los dispersa. Luego se recoge una muestra de 100 peces y se encuentra 18 marcados. ¿Cuántos peces hay en el estanque?

## Nivel avanzado

**11** Una bomba puede llenar un tanque en 20 horas. Cuando se ha llenado 1/5 del tanque se malogra la bomba y reduce su rendimiento en 1/3. ¿Qué tiempo, en total, tarda en llenarse el tanque?

**12** En un viaje de 8 días, una promoción de 20 alumnos gastó 12 800. ¿Cuánto gastarían 30 alumnos en un viaje de 6 días?

**13** Tres máquinas fotocopiadoras producen 10 000 copias trabajando 5 horas diarias durante 6 días. ¿Cuántas máquinas se requieren para producir 50 000 copias trabajando 9 horas diarias durante 10 días?

**14** Tres carpinteros y 2 ayudantes fabrican 64 mesas en 16 días, trabajando 6 horas diarias. Si desean fabricar 80 mesas en 15 días trabajando 8 horas diarias, ¿cuántos ayudantes deben trabajar con un carpintero, si lo que hacen 2 ayudantes equivale a lo que hace un carpintero?

## Tarea

**1** Veinte caballos tienen pasto para 48 días. ¿Cuántos caballos se deben vender para que el pasto dure 15 días más?

**2** Ocho pintores pueden pintar un mural en 30 días. Si después de trabajar 6 días se retiran 5 pintores, ¿con cuántos días de retraso terminan de pinta el mural?

**3** Treinta niños pueden pintar una pared cuadrada de 4 m de lado en 8 días. ¿Cuánto tiempo le toma a 60 niños pintar una pared cuyos lados son el doble de los anteriores?

**4** Jaimito resuelve 10 problemas en 2 horas. ¿Cuántos problemas puede resolver Luisito en 3 horas, si es el doble de rápido que Jaimito?





GENIOMATIC

# Tanto por ciento

Regla de tres y fracciones

Anita tiene una tienda de ropas. Ella compra ropa y vende ganando siempre el 20% de lo que le cuesta cada prenda.

Un día vendió 8 camisas a 60 soles cada una y 12 polos a 30 soles cada uno.

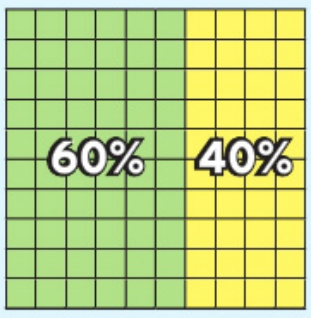
VIDEO DE TEORÍA

**Responde:**

¿Cuál fue su ganancia de ese día? _____

**Tanto por ciento**

Cuando una cantidad se divide en 100 partes iguales, cada parte se llama uno por ciento (1%). Si se consideran, por ejemplo, 60 partes, se denomina 60%.



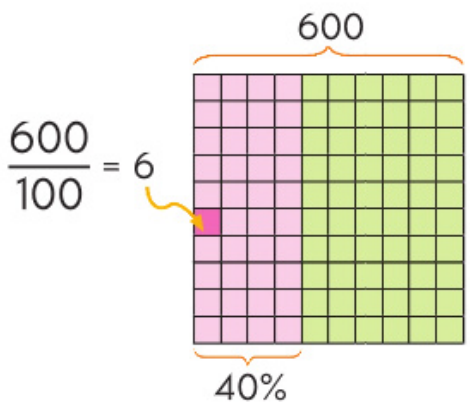

## Problemas básicos de tanto por ciento

### a) Cálculo del tanto por ciento de una cantidad

Zulema compró un vestido con el 40% de su ahorro. Si tenía ahorrado S/. 600, ¿cuánto le costó el vestido?

**Resolviendo:**

- Calculemos el 40% de 600:
- Dividimos 600÷100 = 6, entonces cada parte es 6, de las cuales tomamos 40, lo cual resulta 40×6 = 240.
- Por lo tanto, 40% de 600 es 240.




Forma práctica:

$$40\% \text{ de } 600 = \frac{40}{100}\times 600 = 240$$

En general:

$$a\ \%\ \text{de}\ b = \frac{a}{100}\times b$$

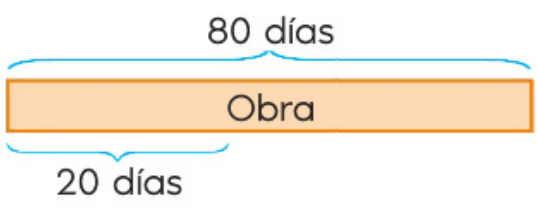
### b) Qué tanto por ciento de una cantidad es otra

Una obra se ha programado para ejecutarla en 80 días. ¿Qué porcentaje de la obra se avanza en 20 días?

**Resolviendo:**

Total: 100% → 80 días

Parte: $x$ → 20 días




$$x = \frac{20\times 100\%}{80} = 25\%$$

Forma práctica:

$$\frac{\text{Parte}}{\text{Todo}}\times 100\%$$

**Ten en cuenta**

**Simplificación del símbolo porcentual**

El símbolo % representa a 100 unidades en el denominador:

- $20\% = \frac{20}{100}$
- $60\% = \frac{60}{100}$

Entonces:

$$60\%\times 300 = \frac{60}{100}\times 300$$

$$60\%\times 300 = 60\times 3 = 180$$

El símbolo % se puede simplificar con dos ceros en el numerador.

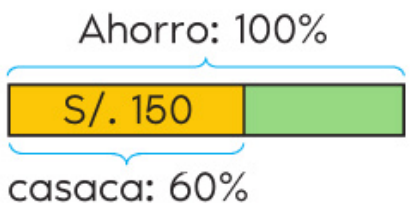
**Equivalencia entre tanto por ciento, fracciones y decimales**

| % | Fracción | Decimal |
|---|---|---|
| 50% | $\frac{1}{2}$ | 0,50 |
| 25% | $\frac{1}{4}$ | 0,25 |
| 20% | $\frac{1}{5}$ | 0,20 |
| 75% | $\frac{3}{4}$ | 0,75 |
| 100% | 1 | 1,00 |
| 150% | $\frac{3}{2}$ | 1,50 |
| 200% | 2 | 2,00 |

## c) El tanto por ciento de qué número es un número dado

Con el 60% de su ahorro, Aníbal compró una casaca de 150 soles. ¿Cuánto tenía ahorrado?

**Resolviendo:**



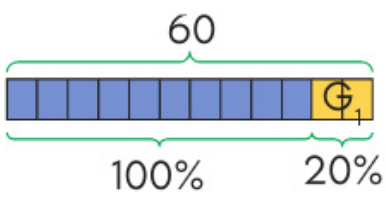

$150 \rightarrow 60\%$

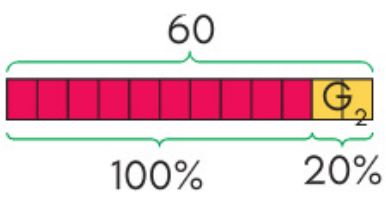
$x \rightarrow 100\%$

$$x = \frac{100 \times 150}{60} = 250$$

$\therefore$ Tenía ahorrados 250 soles.

**Resolviendo:** (Problema introductorio)






$60 \rightarrow 120\%$
$G_1 \rightarrow 20\%$
$\Rightarrow G_1 = \frac{20 \times 60}{120} = 10$

$30 \rightarrow 120\%$
$G_2 \rightarrow 20\%$
$\Rightarrow G_2 = \frac{20 \times 30}{120} = 5$

Por cada camisa gana S/. 10 $\Rightarrow$ en 8 camisas gana: $8 \cdot 10 = 80$.

Por cada polo gana S/. 5 $\Rightarrow$ en 12 polos gana: $5 \cdot 12 = 60$.

$\therefore$ En total gana: $80 + 60 =$ 140 soles.

### Ten en cuenta

**Porcentajes complementarios**

Diremos que dos porcentajes son complementarios si suman el 100%.

- $\underbrace{60\%}_{\text{Complementarios}} + \underbrace{40\%}_{\text{Complementarios}} = 100\%$
- $\underbrace{75\%}_{\text{Complementarios}} + \underbrace{25\%}_{\text{Complementarios}} = 100\%$
- Si se gasta el 40 % queda el 60%.
- Sise pierde el 25% queda el 75%.
- Si de una obra se avanza el 30 %, queda el 70%

**Aumento porcentual**

Cuando una cantidad aumenta en 30% se convierte en 130%.

Si se vende ganando el 40% del costo entonces se vende en el 140% del costo.



### Nivel básico

**1** **Completa** los casilleros de la tabla:

| Número | 50% | 25% | 20% | 75% |
|---|---|---|---|---|
| 800 | | | | |
| 240 | | | | |

**2** **Completa** los casilleros de la tabla:

| 100% | 40% | 25% | 20% | 75% |
|---|---|---|---|---|
| 300 | | 75 | | |
| | 80 | | | |
| | | | 48 | |

**3** **Califica** como verdadero(V) o falso (F) las siguientes proposiciones:

a) 20% + 40% + 10% = 70% ( )

b) 4×10% = 40% ( )

c) 70 + 30% de 70 = 130% de 70 ( )

**4** Analí, Bruno y Carlos recibieron un premio y se lo repartieron en partes iguales. Con su parte, cada uno compró un objeto:

Analí gastó el 40% de su parte, Bruno los 2/5 del suyo y Carlos 0,4 del suyo. Entonces:

I. Analí gastó más que los demás.

II. Carlos gastó menos que los demás.

III. Los tres gastaron igual.



GENIOMATIC

**5** De los 800 soles que gano al mes, gasto el 20% en alimentos, el 50% en alquiler y pasajes. ¿Cuánto me queda?

**8** Un auto está valorizado en S/. 25 000. Si tengo ahorrado el 30% del valor del auto y en un negocio gano S/. 12 500, ¿qué tanto por ciento me falta para completar al valor del auto?

## Nivel intermedio

**6** Si gasto el 27% y luego el 28% de mi dinero, me quedaría 90 soles. ¿Cuánto tengo?

**9** Un sastre vende una camisa en 60 soles, ganando el 25% del costo. ¿Cuál es el precio de costo?

**7** Un pantalón cuesta 30 soles más que la camisa. Si la camisa cuesta el 25% del pantalón, ¿cuánto cuesta la camisa?

**10** ¿Cuál fue el precio fijado de una Laptop que se vendió en 900 dólares, habiéndose descontado en un 20%?

## Nivel avanzado

**11** ¿En cuánto excede el 10% del 25% de 4800 al 25% del 24% de 1500?

**12** Luego de hacer descuentos sucesivos de 20% y 10% al precio fijado de unas zapatillas, se las vendió en S/. 144. ¿Cuál fue el precio fijado?

**13** Si al precio de un terno se le incrementara en el 10% y 20%, sucesivamente, se cotizaría en S/. 264. ¿Cuál es el precio del terno?

**14** Se venden dos pantalones en S/. 40 cada uno, ganando en el primero el 25% del costo y perdiendo en el segundo el 20% del costo. ¿Cuánto se gana o pierde?



## Tarea

**1** Se tienen 320 kilogramos de un fertilizante. Si el 20% es nitrato, ¿cuántos kilogramos del fertilizante no es nitrato?

**2** Se vende una revista a S/. 28, ganando el 40% del precio de compra. ¿Cuánto costó la revista?

**3** ¿Cuál fue el precio fijado de un artículo que se vendió en 540 soles, perdiendo el 20%?

**4** En una población de 4000 habitantes, el 40% son mujeres. Si el 15% de las mujeres y el 45% de los hombres fuman, ¿cuántos habitantes no fuman?



GENIOMATIC

# Regla de interés simple

El abuelo de Mariano ha recibido S/. 8000 por su jubilación. Mariano le ha sugerido que ponga todo ese dinero en una cuenta de ahorros.

Después de consultar en varias agencias, el abuelo encontró una cooperativa de ahorros que le paga el 10% de interés anual.

VIDEO DE TEORÍA

**Responde:**

Si deposita su dinero a interés simple en esta cooperativa, ¿cuánto de interés recibirá en 5 años? _____

**El interés** es una ganancia o utilidad que se obtiene al prestar una suma de dinero a otra persona o entidad.

## 1. Elementos de la regla de interés simple

En el problema propuesto, vamos a identificar los elementos de la regla de interés:

Los S/. 8 000 son el **capital** (C) que va a ser prestado durante 5 años, el **tiempo** (t), al 10% anual, que viene a ser la **tasa** (r).

La **tasa** es porcentual e indica qué tanto por ciento del capital va a ganar cada cierto período de tiempo. Así, 10% anual significa que en un año el interés es el 10% del capital, 7% mensual significa que cada mes el interés es el 7% del capital.

**Resolviendo:** (Problema introductorio)

- Interés en 1 año es $10\% \times 8000 = 800$.
- Entonces el interés en 5 años es $5 \times 800 = 4\,000$ soles.

∴ Al cabo de 5 años obtendrá S/. 4 000 de interés.

**Ten en cuenta**

**Elementos de la regla de interés**

**Capital.-** Es el dinero que se presta a una persona o entidad, para obtener ganancia.

**Tiempo.-** Es el período de duración del préstamo, que puede estar dado en años, meses o días.

**Tasa (r).-** Es el tanto por ciento de ganancia por unidad de tiempo, que puede ser anual, mensual, bimestral, etc.

**Interés (I).-** Es la ganancia que se obtiene al prestar o depositar el capital en una entidad financiera.

**Monto (M).-** Es la suma del capital más sus intereses.

**Año comercial**

- El año comercial se considera de 360 días.
- El mes comercial es de 30 días.

## 2. Fórmulas de interés simple

Un capital C al r% anual, en 1 año gana r%C
En t años gana r%Ct, o sea, I = r%Ct, ordenando:

$$I = \frac{Crt}{100} \begin{cases} t: \text{en años} \\ r: \text{anual} \end{cases}$$

Si en 1 año gana r%C, en un mes gana r%C÷12
En t meses gana r%Ct/12, o sea, I = r%Ct/12:

$$I = \frac{Crt}{1200} \begin{cases} t: \text{en meses} \\ r: \text{anual} \end{cases}$$

Si en 1 año gana r%C, en un día gana r%C÷360
En t días gana r%Ct/360, o sea, I = r%Ct/360:

$$I = \frac{Crt}{36000} \begin{cases} t: \text{en días} \\ r: \text{anual} \end{cases}$$

### *Ejemplo 1*

José le prestó a Miguel 500 soles por 4 meses a una tasa del 6% anual. ¿Cuánto le devolverá Miguel al cabo de los 4 meses?

**Resolviendo:**

Le devolverá el capital más los intereses.

$$\begin{cases} C = 500 \\ r = 6\%\ \text{anual} \\ t = 4\ \text{meses} \end{cases} \quad \begin{cases} I = \dfrac{Crt}{1200} \\ I = \dfrac{500 \cdot 6 \cdot 4}{1200} = 10 \end{cases}$$

$\therefore$ Le devolverá:

$500 + 10 =$ 510 soles.

### *Ejemplo 2*

Una cooperativa paga por los ahorros un interés de 8% bimestral. Olivia puso en esta cooperativa 15 000 soles durante año y medio. ¿Cuánto de interés le pagaron?

**Resolviendo:**

Como la tasa no es anual, tenemos la opción de convertirla en anual o pasar el tiempo a bimestres y aplicar la fórmula general:

**Método 1.-** Convirtiendo la tasa a anual:

Un año tiene 6 bimestres.

Como en cada bimestre gana 8%, en 6 bimestres gana $6 \times 8\% = 48\% \Rightarrow r = 48\%$.

$$\begin{cases} C = 15\,000 \\ r = 48\%\ \text{anual} \\ t = 18\ \text{meses} \end{cases} \quad \begin{cases} I = \dfrac{Crt}{1200} \\ I = \dfrac{15000 \cdot 48 \cdot 18}{1200} = 10\,800 \end{cases}$$

$\therefore$ Ganará 10 800 soles.

**Método 2.-** Convirtiendo el tiempo en bimestres:

Año y medio tiene 18 meses y en 18 meses hay 9 bimestres.

$$\begin{cases} C = 15\,000 \\ r = 8\%\ \text{bimestral} \\ t = 9\ \text{bimestres} \end{cases} \quad \begin{cases} I = \dfrac{Crt}{100} \\ I = \dfrac{15000 \cdot 8 \cdot 9}{100} = 10\,800 \end{cases}$$

$\therefore$ Ganará 10 800 soles.

**Ten en cuenta**

**Fórmula general**

Las tres fórmulas de interés se aplican siempre que la tasa es anual, lo que determina el denominador es el tiempo. Si el tiempo está en años el denominador es 100, si está en meses, 1 200 y si está en días, 3 6000.

Cuando la tasa no es anual, se la convierte en anual o se lleva el tiempo a las mismas unidades de la tasa.

Por ejemplo si la tasa es bimestral se lleva el tiempo a bimestres y se aplica la fórmula: $I = \dfrac{Crt}{100}$



## Nivel básico

**1** Tres bancos ofrecen a Marianela tres tasas de interés distintas por su capital:

Banco A: 6% semestral

Banco B: 10% anual

Banco C: 2% mensual

¿Cuál de los bancos le conviene?

**2** Marcelo va a retirar después de ahorrar su capital de 3000 soles durante 4 años al 5% anual. ¿Cuánto retira?

**3** **Halla** el interés que produce S/. 4500 durante 5 años al 4% mensual.

**4** ¿Cuál es el interés semestral que origina S/.1200 al 5% anual?

**5** Un banco paga 4% anual cuando los ahorros son por meses y 6% anual por los ahorros por años. ¿Cuánto de interés paga por un ahorro de 1800 soles por 2 años y 5 meses?

## Nivel intermedio

**6** ¿En cuánto se convierte un capital de S/. 1600 colocado en un banco, durante 9 meses, al 15% trimestral?

**7** **Halla** el interés producido por un capital de S/. 2400 durante 1 año y 8 meses, si la tasa es 10% anual.

**8** En cuánto se convierte un capital de S/.8000 colocado en un banco durante 7 años al 5% mensual.

**9** ¿Cuánto tiempo debe ser prestado un capital al 5% trimestral para que se triplique?

**10** Los 2/5 de un capital se prestan al 30% anual y el resto a una tasa tal que ambos capitales producen el mismo interés en un mismo período. ¿Cuál es esta tasa?

## Nivel avanzado

**11** ¿Cuánto tiempo debe ser prestado un capital al 15% semestral para que se cuadruplique?

**12** Si un capital de S/. 23760 se divide en tres partes iguales para imponerlos al 50%; 45% y 60%, durante 3 años, ¿qué monto total originan?

**13** La diferencia de dos capitales es 1500. Si se impone uno al 8% y el otro al 4% anual, al cabo de un año y medio, los montos son iguales. ¿Cuál es el capital mayor?

**14** Una persona coloca la mitad de su capital al 6%, la tercera parte al 5% y el resto al 4%, obteniendo un interés anual de S/. 32000. ¿Cuál es el capital?



## Tarea

**1** **Halla** el interés cuatrimestral que producen S/. 2 400 impuestos al 1,5% bimestral.

**2** ¿Cuánto tiempo debe ser prestado un capital al 15% semestral para que se quintuplique?

**3** ¿En cuánto se convierte un capital de S/. 3 000 al ser depositado durante 2 años y 6 meses al 2% mensual?

**4** ¿A qué tasa anual se ha prestado un capital, que en 3 meses produce un interés igual al 5% del capital prestado?

**5** Los montos que originan un mismo capital durante 8 meses y 11 meses son S/. 12 000 y S/. 15 000, respectivamente. ¿A cuánto asciende el capital?

# Reforzando - Unidad 7

## Olimpiadas nacionales e internacionales

**1** El precio de una computadora es 2 800 soles. Si compro con un descuento del 15%, ¿cuánto pago?

A) S/. 2 340 B) S/. 2 365
C) S/. 2 480 D) S/. 2 380

**2** Compré una Laptop en 1235 con el 24% de descuento. ¿Cuánto me descontaron?

A) S/. 340 B) S/. 390
C) S/. 480 D) S/. 380

**3** En una granja hay 1 200 aves: el 55% gallinas y el resto pavos. ¿Cuál es la diferencia entre el número de gallinas y el número de pavos?

A) 100 B) 120 C) 60 D) 90

**4** En una colecta para la Cruz Roja, se fija recaudar como meta 700 000 nuevos soles. Si se recaudó 630 000 nuevos soles, ¿qué porcentaje de la meta se alcanzó?

A) 80% B) 96% C) 90% D) 95%

**5** Si una vara de 2 m de longitud da una sombra de 6 m, ¿cuál es la altura de una torre cuya sombra, a la misma hora, es de 60 m?

A) 20 m B) 15 m
C) 18 m D) 25 m

**6** En un concurso de matemáticas, Renzo respondió correctamente 72 preguntas de una prueba de 120 preguntas. ¿Qué porcentaje de preguntas respondió correctamente?

A) 40% B) 6% C) 60% D) 54%

**7** Compré un televisor de 1200 soles pagando 1032 soles. ¿Qué porcentaje de descuento me dieron?

A) 16% B) 14% C) 15% D) 12%

**8** Un equipo de 12 exploradores tiene víveres para 20 días. Si deciden explorar solo 15 días, ¿cuántos hombres más podrían llevar sin que se perjudiquen en la alimentación?

A) 4 B) 16 C) 5 D) 6

**9** Un cerrajero hace 25 ventanas en un mes de 30 días. ¿Cuántas ventanas fabricará en 150 días?

A) 120 B) 125 C) 128 D) 150

**10** Ernesto compró una casa en S/. 125 000, pagando una cuota inicial del 20% del precio de la casa. El resto lo pagará en cuotas iguales durante 10 años y sin intereses. ¿Cuánto pagará anualmente?

A) S/. 10 000 B) S/. 12 000
C) S/. 9 000 D) S/. 15 000

**11** Rolando gana 1 600 soles mensuales. Si el 9% de su sueldo lo destina a pagar los servicios telefónicos, ¿qué cantidad de dinero le queda para los otros gastos?

A) S/. 1 540 B) S/. 1 465
C) S/. 1 445 D) S/. 1 456

**12** Tengo 1200 soles y quiero ahorrar este dinero durante 8 meses. Si me pagan un interés del 15% anual, ¿cuánto ganaría de interés?

A) S/. 120 B) S/. 140
C) S/. 155 D) S/. 125

**13** En una travesía en barco, 1 190 hombres tienen víveres para cuatro meses de 30 días. Si se quiere que los víveres duren 20 días más, ¿cuántos hombres habrá que dejar de lado?

A) 140 B) 250
C) 180 D) 300

**14** ¿Cuánto de interés produce 1500 soles al 12% de interés anual en 3 años y 10 meses?

A) S/. 560 B) S/. 540
C) S/. 690 D) S/. 720

**15** Un equipo de 25 obreros puede hacer una obra en 60 días. Si se despide 5 de ellos, ¿en qué tiempo harán la obra los demás obreros?

A) 55 días B) 65 días
C) 70 días D) 75 días

**16** Una cuadrilla de obreros tiene planificado terminar una obra en 27 días, trabajando 8 horas diarias. Con la finalidad de acelerar la obra se les pide que trabajen una hora más por día. Si así lo hacen, ¿cuántos días antes terminan la obra?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 1

**17** El reloj de un amigo se atrasa 4 minutos cada hora. ¿Después de cuántas horas marcará la hora exacta?

A) 240 B)180 C) 360 D)60

**18** Cinco albañiles acordaron romper un muro en seis horas. Si solo fueron tres albañiles, ¿qué tiempo emplearon en cumplir con el cometido?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10

**19** Si una cuadrilla de 10 obreros puede hacer una obra en 12 días, ¿con cuántos obreros se haría la obra en 15 días?

A) 4 B) 15 C) 8 D) 5

**20** Doce hombres pueden hacer una obra en cinco días. ¿Cuántos hombres más harían falta para hacer la obra en 4 días?

A) 4 B) 15 C) 3 D) 5

**21** Andrea gana el 20% del precio de venta de los productos de belleza que vende. ¿Cuál fue su venta de la semana si ganó 280 soles?

A) S/. 1 350 B) S/. 1 400
C) S/. 1 450 D) S/. 1 500

**22** Doce obreros levantan un muro de 180 metros en 36 días. ¿En cuántos días levantarán un muro similar de 240 metros, 8 obreros?

**23** Un equipo de trabajo de 15 obreros puede hacer una obra en 60 días. ¿Con cuántos obreros se haría la obra en 36 días?

**24** Un ejército de 600 hombres tiene víveres para 80 días a razón de tres raciones por día. ¿Cuántas raciones diarias deberá tomar cada hombre si se quiere que los víveres duren 40 días más?

**25** Eugenio quiere ganar 240 soles de interés poniendo su capital durante 10 meses en una financiera que le paga 9% de interés anual. ¿Cuánto de capital tendría que depositar?

**26** Una cuadrilla de obreros emplea 14 días, trabajando 8 horas diarias, en ejecutar una obra. Si hubiera trabajado una hora menos al día, ¿en cuántos días habría terminado la obra?

**27** Miguel hace 35 carpetas en una semana. ¿Cuántas carpetas fabrica en 12 días?

**28** Doce obreros empiezan a hacer una obra y a los 21 días tienen avanzada la tercera parte de la misma. ¿Cuántos obreros más será necesario contratar para que la obra se termine en 18 días más?

**29** Si 18 obreros pueden terminar una casa en cuatro meses, ¿cuántos obreros más serán necesarios para terminarla en tres meses?

**30** Rodolfo, viajando a 65 km/h, tarda 8 horas para ir de una localidad a otra. ¿Cuántas horas menos tardaría viajando a 80 km/h?

# Autoevaluación

**1** Un ganadero tiene alimentos suficientes para 350 cerdos durante 150 días. ¿Cuántos cerdos tendría que vender para que los alimentos duren 210 días?

**2** Marcelo quiere comprar un juego de buzos. Una tienda le ofrece en 90 soles con un descuento del 20% y otra tienda le ofrece en 84 soles con un descuento del 15%. ¿En cuál de las tiendas le sale más barato?

**3** Luci ganó un premio de 450 soles y quiere ahorrarlo todo durante 2 años. Un banco le ofrece pagar 12% de interés anual. Si decide ahorrar en este banco, ¿qué monto obtendrá al cabo de los dos años?

**4** Pedro compró unas zapatillas por 180 soles. Él quiere vender ganando el 20%, pero ofrece las zapatillas en S/. 250,00. A lo más, ¿cuánto puede rebajar sin perjudicar la ganancia fijada?

**5** Según las proyecciones que ha hecho Benjamín, dentro de dos años la cámara fotográfica que desea tener costará S/. 910. ¿A qué tasa tendría que ahorrar los 700 soles que posee para que con el monto obtenido pueda comprar en dos años la cámara deseada?

**6** Juan compra un par de chompas por S/. 96 y vende 1/4 de docena por S/. 180. ¿Cuántas docenas de chompas necesita comercializar para ganar en total S/. 2 160?

# 8 Estadísticas y probabilidades

Para tomar decisiones en base a datos cuantificados, es necesario gestionarlos, procesarlos e interpretarlos, y la Estadística nos provee de herramientas para hacerlo.

Enfoque de Orientación al bien común

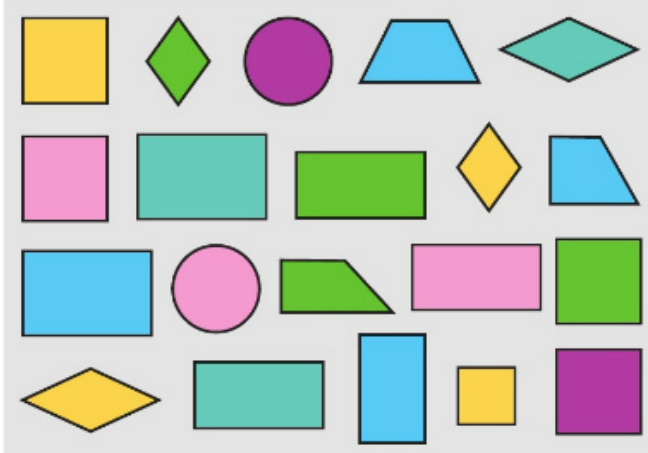
## Cuidamos los bienes de nuestro colegio

En la casa tenemos artefactos de cocina, muebles y muchas cosas de uso familiar y personal; en el colegio también tenemos ambientes, artefactos y muebles de uso común, los cuales debemos respetar y cuidarlos: mantenerlos limpios, ordenados, no desperdiciarlos en vano ni apropiarnos de ellos, porque son de todos y a la vez de cada uno de los que formamos parte de la institución donde estudiamos.

| Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre (Estadística y probabilidades) | |
|---|---|
| **Capacidades** | **Desempeños** |
| **Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas** | Expresa los datos en tablas de distribución de frecuencias. |
| **Comunica la comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos** | Representa los datos estadísticos mediante distintos tipos de gráficos estadísticos. |
| **Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos** | Usa estrategias para resolver problemas de medidas de tendencia central. |
| **Sustenta conclusiones o decisiones en base a información obtenida** | Interpreta y explica las particularidades y características resaltantes de los gráficos estadísticos. |

# Tabla de distribución de frecuencias

Regla de tres y tanto por ciento



La profesora pidió a los alumnos dibujar una figura geométrica.

Luego de que hicieran los dibujos, ella misma ordenó en una hoja todas las figuras para analizar la preferencia de los alumnos por las figuras.

VIDEO DE TEORÍA

**Elabora:** Con los datos de la figura elabora una tabla de frecuencias.

La Estadística es una rama de las matemáticas aplicadas que se encarga de recopilar datos, ordenarlos y presentarlos para el análisis y la comprensión de la variable que se pretende estudiar.

## 1. Conceptos básicos de Estadística

- **Población:** Es el conjunto de individuos con características comunes que se desea estudiar. Por ejemplo, la deserción escolar en los colegios estatales.
- **Muestra:** Es un subconjunto representativo de la población, escogido para obtener información de la población. Por ejemplo, los colegios con una población mayor a 1000 estudiantes.
- **Variable estadística:**

  Es una característica observable en la población y puede ser:

  a) **Cuantitativa.-** Cuando la característica se puede medir o cuantificar, como el número de pacientes con cáncer, el peso de los niños de 5 años, etc.

  b) **Cualitativa.-** Cuando la característica es una cualidad, como estado civil, sexo, ocupación, etc.

## 2. Tabla de distribución de frecuencias

Es una forma de organizar sistemáticamente los datos de la muestra.

**Resolviendo:** (Problema introductorio)

Elaboremos la tabla de frecuencias:

| ¿Qué figuras hay? | ¿Cuántas hay de cada figura? | ¿Qué parte del total son? | ¿Qué porcentaje del total son? |
|---|---|---|---|
| Datos ($x_i$) | Frecuencia absoluta ($f_i$) | Frecuencia relativa ($h_i$) | Frecuencia relativa porcentual ($\%h_i$) |
| Rectángulo | 6 | 0,30 | 30% |
| Trapecio | 3 | 0,15 | 15% |
| Rombo | 4 | 0,20 | 20% |
| Cuadrado | 5 | 0,25 | 25% |
| Círculo | 2 | 0,10 | 10% |
| **Total** | **20** | **1,00** | **100%** |

**Ten en cuenta**

**Frecuencia absoluta ($f$)**
Es el número de veces que se presenta un dato. Su total es el número de datos o tamaño de la muestra (n).

**Frecuencia relativa ($h$)**
Es el cociente de la frecuencia absoluta entre el número de datos. Su suma es 1.

**Frecuencia relativa porcentual ($\%h$)**
Es la frecuencia relativa expresada en términos porcentuales. Su suma es 100%.

**Frecuencia acumulada ($F$)**
Suma de una frecuencia absoluta más las anteriores a ella.

**Enunciado 1**

A un grupo de personas se le pidió que indique su color favorito, y se obtuvo los siguientes resultados:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| negro | azul | verde | rojo | azul |
| azul | rojo | negro | azul | rojo |
| rojo | verde | verde | azul | rojo |
| negro | azul | rojo | negro | verde |

## Nivel básico

**1** **Elabora** una tabla de distribución de frecuencias.

**2** ¿Qué porcentaje de las personas prefiere el color negro?

**Enunciado 2**

Eduardo recibió en su celular 15 mensajes el lunes, 24 el martes, 30 el miércoles, 25 el jueves, 32 el viernes, 60 el sábado y 14 el domingo.

**3** **Elabora** una tabla de frecuencias de los mensajes recibidos durante la semana.

**4** En esa semana, ¿cuántos mensajes recibió hasta el jueves?

**5** ¿Cuál es el mayor porcentaje de mensajes recibidos?

**Enunciado 3**

La tabla muestra el número de inasistencias de alumnos en el colegio de Piero durante el primer trimestre del año escolar:

| Inasistencias $x$ | Alumnos $f$ |
|---|---|
| 1 a 2 | 14 |
| 3 a 4 | 10 |
| 5 a 8 | 6 |
| Más de 8 | 10 |

## Nivel intermedio

**6** **Completa** la tabla con la frecuencia relativa, la frecuencia acumulada y la frecuencia relativa porcentual.



GENIOMATIC

**7** ¿Cuántos alumnos tienen más de 4 faltas?

**8** ¿Cuántos alumnos han tenido al menos 3 faltas durante el trimestre?

## Enunciado 4

La tabla muestra el reporte de las actividades deportivas que realizan 600 universitarios.

| Deportes $x$ | $h$ |
|---|---|
| Fútbol | 0,4 |
| Baloncesto | 0,2 |
| Artes marciales | 0,3 |
| Ajedrez | 0,1 |

**9** **Completa** la tabla con la frecuencia absoluta y la acumulada.

**10** ¿Cuántos universitarios más practican fútbol que ajedrez?

## Enunciado 5

Una tienda de autos realizó una feria durante el mes de setiembre y registró la cantidad de autos vendidos en cada día:

0; 1; 2; 1; 2; 0; 3; 2; 4; 0; 4; 2; 1; 0; 3; 0; 0; 3; 4; 2; 0; 1; 0; 3; 0; 1; 2; 1; 2; 3.

### Nivel avanzado

**11** **Elabora** una tabla de frecuencias.

**12** ¿Cuántos días no se vendieron autos?

**13** Si cada auto se vende en 20 mil dólares, ¿cuál fue el importe total de los días de mayor venta?

**14** **Completa** el cuadro:

| Pasatiempo | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ |
|---|---|---|---|
| TV | 4 | | 0,1 |
| Cine | | 10 | |
| Teatro | | | |
| Deporte | | | 0,5 |

## Tarea

**Enunciado**
La tabla muestra el promedio en años de esperanza de vida de algunos animales.

| Animal | Años |
|---|---|
| Cerdo | 25 |
| Gato | 23 |
| Zorro | 18 |
| Oveja | 15 |
| Perro | 17 |

**1** **Completa** las siguientes oraciones:

a) El cerdo vive ___ años más que el zorro.

b) Mi perro murió de vejez en el 2019, entonces probablemente nació en ____

c) Un zorro y una oveja murieron de forma natural en 2020, entonces el zorro nació en ____ y la oveja en ____ .

**2** **Ordena** según el orden en que morirán los animales de la tabla nacidos el mismo año.

**3** Se ha entrevistado a 20 familias sobre la cantidad de tarros de leche que consumen a la semana y se obtuvo:

0 ; 2 ; 4 ; 2 ; 1 ; 3 ; 1 ; 1 ; 4 ; 2 ;
3 ; 2 ; 2 ; 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 2 ; 1 ; 3 ;

**Elabora** la tabla de distribución de frecuencias.

**4** **Completa** la tabla de distribución de frecuencias.

| Marca de bebida | $f_i$ | $F_i$ | % |
|---|---|---|---|
| Coca Cola | 24 | | |
| Inca Kola | | 40 | |
| Kola Real | 10 | | |
| Fanta | | 80 | |

# Gráficos estadísticos

Tabla de distribución de frecuencias

| N° Hnos. ($x_i$) | Frecuencia ($f_i$) |
|---|---|
| 0 | 3 |
| 1 | 6 |
| 2 | 5 |
| 3 | 2 |
| Más de 3 | 4 |

En el salón se preguntó a cada alumno por el número de sus hermanos, y con las respuestas se elaboró la tabla de distribución de frecuencias que se muestra a la izquierda.

VIDEO DE TEORÍA

**Elabora:**

Representa los datos de la tabla mediante gráficos de barras, lineal, circular y mediante pictogramas.

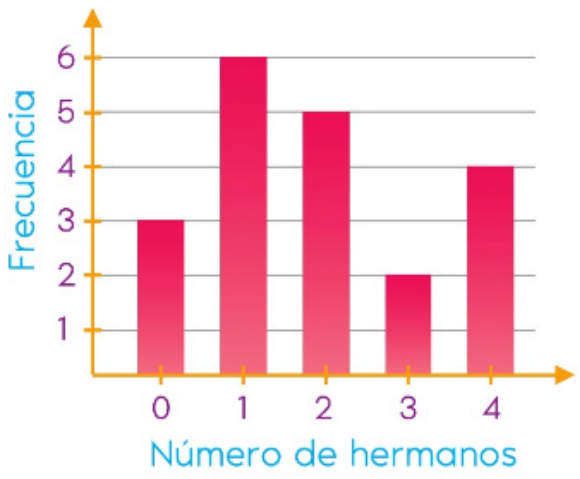
**Los gráficos estadísticos** son representaciones de los datos estadísticos en las que se puede visualizar mejor las particularidades de los datos.

Entre los gráficos estadísticos tenemos el gráfico de barras (verticales y horizontales), el gráfico lineal, el circular y los pictogramas.

## a) Gráfico de barras verticales

La frecuencia de cada variable estadística es representada mediante una barra vertical cuya altura es proporcional a la frecuencia.

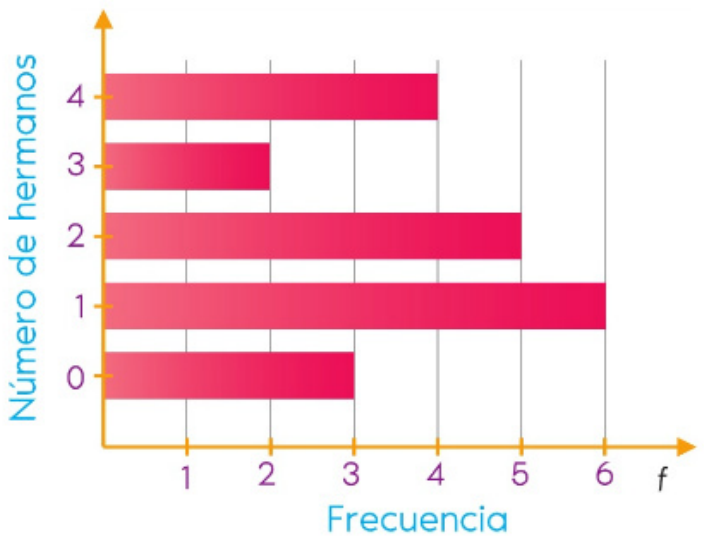
En el eje horizontal van las variables estadísticas y en el vertical, la frecuencia.




## b) Gráfico de barras horizontales

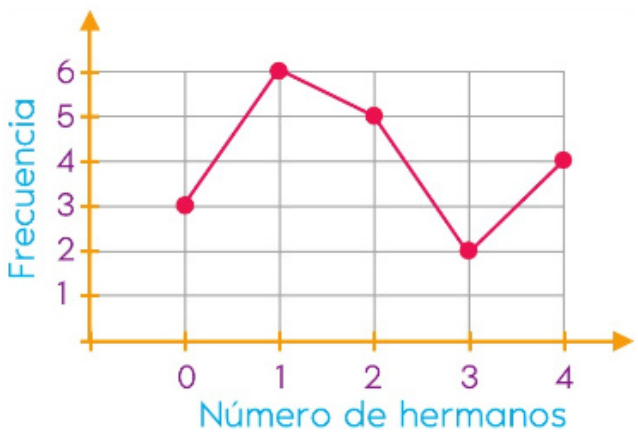
La frecuencia de cada variable estadística es representada mediante una barra horizontal cuya longitud es proporcional a la frecuencia.

En el eje vertical van las variables estadísticas y en el horizontal, la frecuencia.




## c) Gráfico de líneas

En el eje de abscisas se representan las variables estadísticas, y cada una de la frecuencias se representa mediante un punto. El gráfico se obtiene uniendo los puntos con segmentos de recta.



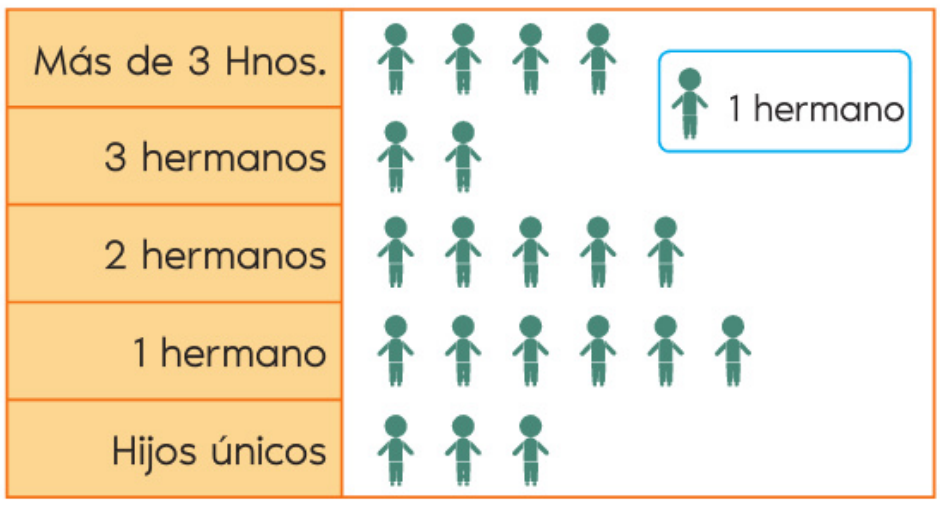
## d) Gráficos circulares

Cada variable estadística se representa mediante sectores circulares cuyo ángulo central es proporcional a la frecuencia. El ángulo central se obtiene multiplicando 360° por la frecuencia relativa.

| $x_i$ | $f_i$ | $h_i$ | $\%h_i$ | $360° \times h_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 3 | 0,15 | 15% | 54° |
| 1 | 6 | 0,30 | 30% | 108° |
| 2 | 5 | 0,25 | 25% | 90° |
| 3 | 2 | 0,10 | 10% | 36° |
| Más de 3 | 4 | 0,20 | 20% | 72° |
| **Total** | **20** | **1,00** | **100%** | **360°** |

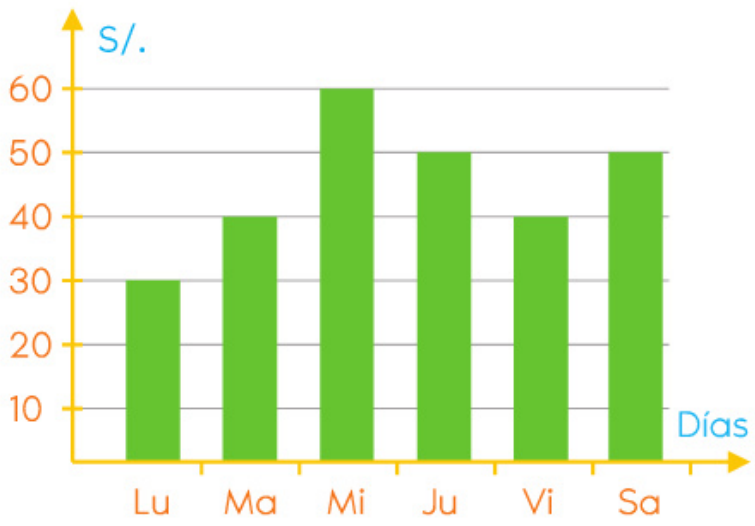
## e) Pictogramas

En los pictogramas, las frecuencias se representan con dibujos o íconos alegóricos de los datos que se estudian.




**Enunciado 1**

El gráfico muestra el volumen de ventas en miles de soles, obtenido por un equipo de ventas durante una semana.




### Nivel básico

**1** ¿Qué día de la semana se vendió más?

**2** ¿Qué días se obtuvo la misma venta?

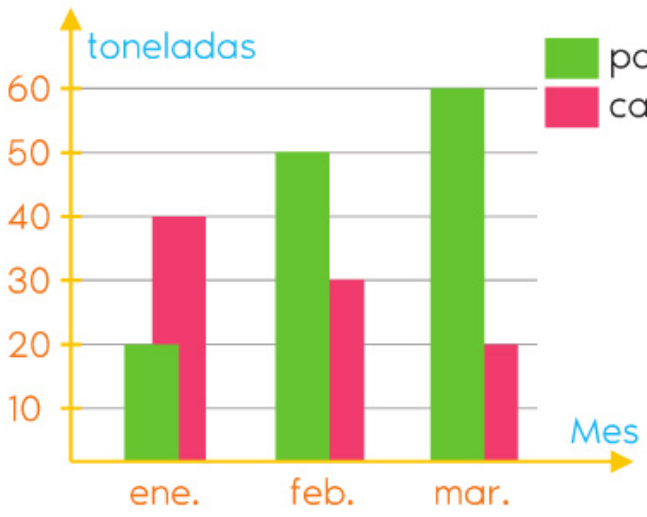
**3** ¿Qué días subieron las ventas?

**4** ¿Cuál fue la venta total de la semana?

**5** ¿En qué porcentaje subieron las ventas de viernes a sábado?

## Enunciado 2

El gráfico muestra la producción (en toneladas) de tubérculos en tres meses del año.




## Nivel intermedio

**6** Respecto al gráfico se puede afirmar que:

I. Se produce más papa que camote.

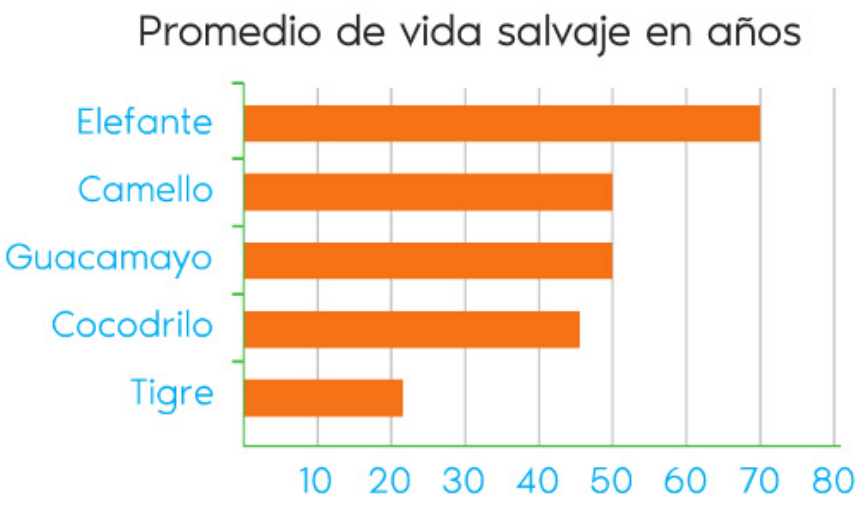
II. Cuando la producción de papa aumenta la de camote disminuye.

III. En los 3 meses se produjo 40 toneladas más de papa que de camote.

**7** ¿En cuánto por ciento disminuyó la producción de camote de enero a febrero?

**8** Si en marzo la tonelada de papa estaba en S/. 2000 y la de camote en S/. 800, ¿cuál fue la producción del mes, en soles?

## Enunciado 3




Según el gráfico mostrado, **responde** las siguientes preguntas.

**9** Un elefante que nació en 1980, ¿en qué año morirá en forma natural?

**10** Supóngase que un guacamayo, un cocodrilo y un tigre murieron en forma natural el año 2015. ¿En qué año nacieron cada uno?

## Nivel avanzado

**11** La tabla muestra el número de medallas ganadas en una competencia internacional. **Elabora** un diagrama de sectores circulares.

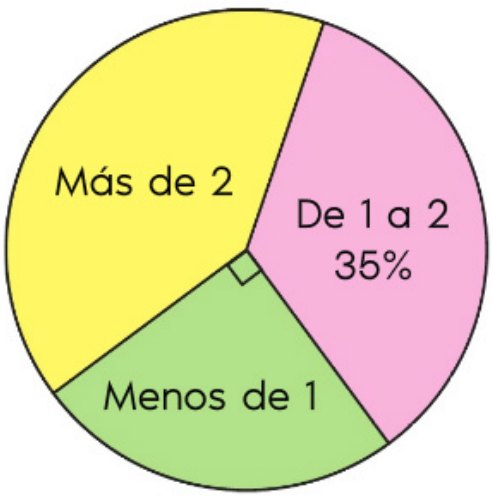
| País | Medallas |
|---|---|
| Brasil | 60 |
| Perú | 50 |
| Argentina | 30 |
| Chile | 20 |

**12** ¿Qué porcentaje dedica más de 2 horas a practicar matemáticas?

**13** De un universo de 200 alumnos, ¿cuántos dedican de 1 a 2 horas a practicar matemáticas?

### Enunciado 5

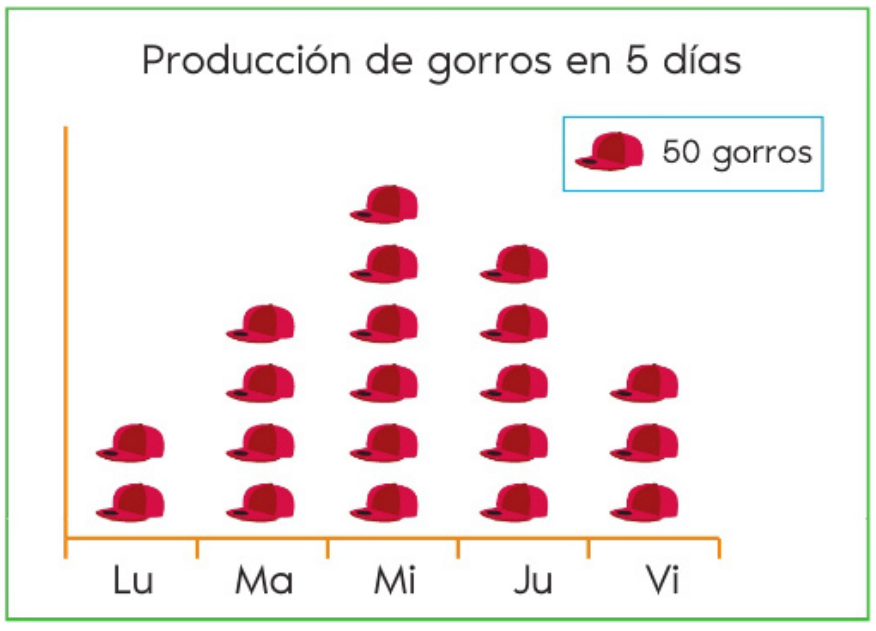
El gráfico muestra la cantidad de horas que dedican los alumnos a practicar matemáticas.




**14** ¿Qué porcentaje dedica al menos 1 hora a practicar matemáticas?

## Tarea

### Enunciado




Con los datos del histograma mostrado, **elabora:**

1. Una tabla de distribución de frecuencias.
2. Un gráfico de barras horizontales.
3. Un gráfico de barras verticales.
4. Un diagrama circular.

# Medidas de tendencia central

Tabla de distribución de frecuencias

Las notas bimestrales de Alfredo, en matemáticas, son 11; 12; 13 y 11. Su papá ha prometido comprarle una Laptop si aprueba matemática con 14.

El último mes del año, la profesora le ha propuesto dar una prueba final para que sustituya la nota bimestral más baja.

VIDEO DE TEORÍA

**Elabora:**

¿Cuánto debe sacar en la prueba final si quiere que su padre le compre la Laptop? _____

**Promedio**

Se denomina promedio a una cantidad que tiene la cualidad de representar un conjunto de cantidades. Un promedio es una medida de tendencia central porque es un valor intermedio entre los valores extremos.

Existen varias formas de calcular el promedio. Las más comunes son la media, la mediana y la moda.

## a) Media aritmética o simplemente media o promedio ($\overline{x}$)

La media aritmética de un conjunto de datos es igual a la suma de todos los datos dividido entre el número de los mismos.

$$\overline{x} = \frac{\overbrace{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_n}^{\text{suma de datos}}}{\underbrace{n}_{\text{número de datos}}}$$

$\overline{x}$: media

**Resolviendo:** (Problema introductorio)

- Para que el promedio sea 14, las 4 notas deben sumar $4 \times 14 = 56$
- La nota que será sustituida es 11, y las notas restantes suman: $12 + 13 + 11 = 36$
- Para que la suma total sea 56, la nueva nota debe ser $56 - 36 = 20$

$\therefore$ En la prueba final debe obtener 20.

### Media aritmética ponderada

Supongamos que en un salón hay 7 alumnos de 12 años, 5 alumnos de 10 años, 6 alumnos de 13 años y 2 alumnos de 14 años. ¿Cuál sería el promedio de edades de estos alumnos?

Tendríamos que sumar todas las edades y dividir ente el número de alumnos, eso equivale a elaborar una tabla y proceder del modo siguiente:

| Edad $x$ | N° Alumnos $f$ | $fx$ |
|---|---|---|
| 10 | 5 | 50 |
| 12 | 7 | 84 |
| 13 | 6 | 78 |
| 14 | 2 | 28 |
| **Total** | **20** | **240** |

$$\overline{x} = \frac{240}{20} = 12$$

$$\overline{x} = \frac{x_1f_1 + x_2f_2 + x_3f_3 + \ldots + x_nf_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n}$$

Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre (Estadística y probabilidades)

## b) Mediana (Me)

Para obtener la mediana se debe ordenar los datos de menor a mayor. La mediana es el dato central, y si el número de datos es par, es la media de los datos centrales.

### *Ejemplo 1*

Santos trabaja como técnico en un centro de salud. Él anota las edades de los pacientes. En su apunte del turno mañana, los datos son: 45; 10; 27; 60; 55; 42 y 14; en el turno tarde ha anotado: 17; 8; 3; 72; 5; 35; 60 y 9. ¿Cuál es la mediana de los datos de cada turno?

**Resolviendo:**

- Turno mañana:

3 datos | 3 datos

10 14 27 **42** 45 55 60 ← 7 datos

Me = 42

- Turno tarde:

3 datos | 3 datos

3 5 8 **9 17** 35 60 72 ← 8 datos

Me = (9 + 17)÷2 = 26÷2 = 13

## c) Moda (Mo)

La moda de un conjunto de datos es el dato que más se repite. Cuando hay dos datos que se repiten más que las demás y en igual cantidad de veces, se dice que el conjunto de datos es bimodal.

### *Ejemplo 2*

En una conferencia para empleados públicos, Elisa ha preguntado a 10 empleados por su sueldo y ha obtenido los siguientes datos, en soles: 1500; 3000; 2400; 3200; 2400; 4200; 3000; 2400; 4200; 3000. Determina la moda.

**Resolviendo:**

1500 **3000** 2400 3200 2400 4200 **3000** 2400 4200 **3000** ⇒ Mo = 3000

**Nivel básico**

**1** Los siguientes datos corresponden a las edades de los alumnos de sexto grado:

12 ; 10 ; 11 ; 11 ; 10 ; 11 ; 11 ;
12 ; 10 ; 10 ; 11 ; 10 ; 12 ; 11 ;

**Halla** la diferencia entre la mediana y la moda.

**2** Se ha encuestado a 50 personas sobre sus gastos diarios, y con los resultados se ha elaborado la tabla adjunta.

| Gastos | $f_i$ | $h_i$ |
|---|---|---|
| 25 | 20 | |
| 30 | | 0,20 |
| 20 | | 0,10 |
| 40 | 15 | |

**Completa** la tabla.





GENIOMATIC

**3** Se tienen los siguientes datos ordenados:

10 ; 12 ; $a$ ; $a$ ; $b$ ; $b$ ; $b$ ; 16

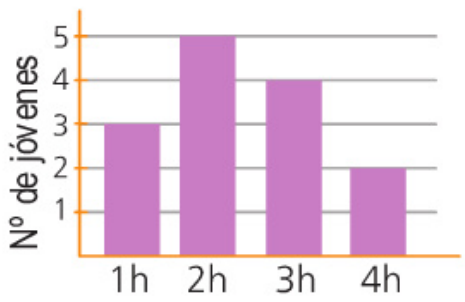
La media es 13,625 y la mediana, 14. **Halla** la moda.

**4** El diagrama circular representa las horas por semana que pasan las mujeres en el gimnasio.

**Halla** la media.

**5** El gráfico muestra la cantidad de horas que escuchan música los jóvenes.

**Halla** la media y la moda.

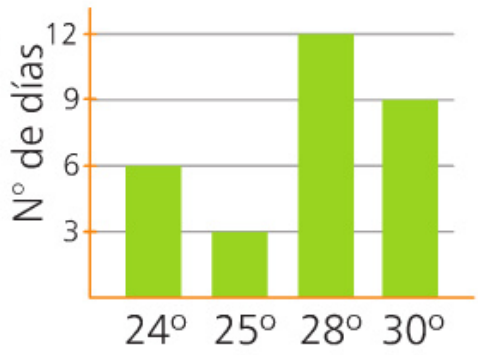



## Nivel intermedio

**6** **Completa** el cuadro:

| Notas obtenidas | $\bar{x}$ | me | mo |
|---|---|---|---|
| 9; 10; 11; 12; 13; 13; 14; 15 | | | |
| 16; 17; 18; 19; 20 | | | |
| 1; 2; 4; 4; 4; 15; 16; 17; 18 | | | |

**7** El diagrama de barras muestra la temperatura en grados Celsius durante el mes de noviembre. ¿Cuál fue la temperatura media?

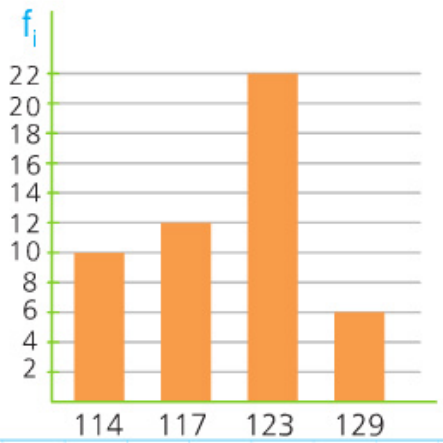



**8** **Completa** el cuadro y **halla** la media.

| Peso(kg) | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ |
|---|---|---|---|
| 120 | 10 | | |
| 130 | | | 0,25 |
| 140 | 30 | | |
| 150 | 5 | | |
| 160 | | 80 | |

**9** Si la mediana de los siguientes datos ordenados: $a$; $a$+1; $b$; $b$; 19 y 20, es 17 y la media, 15, **halla** a×b.

**10** **Halla** la media de los datos del siguiente diagrama:



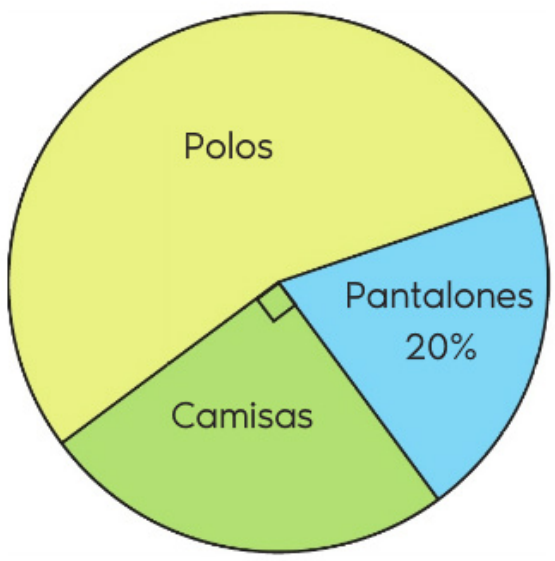
## Nivel avanzado

**11** **Completa** el cuadro y **halla** la media:

| Peso(kg) | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ |
|---|---|---|---|
| 74 | 32 | | |
| 82 | | | 0,48 |
| 65 | | 100 | |

**Enunciado**

El gráfico muestra el número de prendas vendidas durante 5 días.




**12** Si se vendieron 160 prendas en total, ¿cuántas prendas se vendieron por día en promedio?

**13** Si los polos se venden en 10 soles, las camisas en 40 soles y los pantalones en 50 soles, ¿cuál es el promedio de ventas por día, en soles?

**14** El promedio de las edades de 5 amigos es 12 años. Si ninguno tiene menos de 10 años, ¿cuál puede ser la máxima edad de uno de ellos?

## Tarea

**1** De los datos:

a) 8; 12; 13; 9; 8; 7; 6; 11, **halla** la mediana.

b) 13; 14; 16; 9; 6; 8; 7; 11; 14; 9, **halla** la moda.

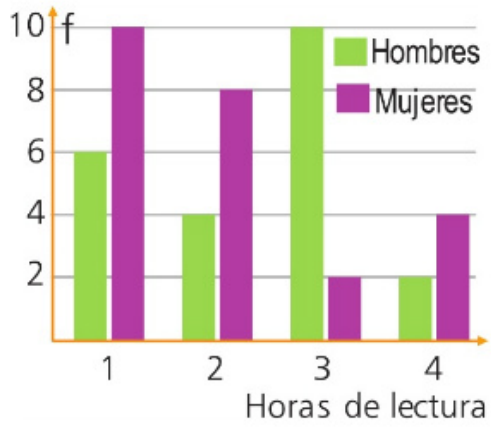
**2** Max ha obtenido las siguientes notas en tareas y ejercicios de Matemática. **Halla** su promedio.

10; 11; 14; 15; 16; 14; 12; 17; 11; 12;

14; 15; 12; 11; 13; 16; 12; 15; 13; 11.

**3** Al realizar una colecta (en S/.) los aportes fueron 20; *a*; *b*; *b*; 16; 26; 28; 30 (datos ordenados). Si la mediana es 25 y la media, 25,5; **halla** el valor de *a*.

**4** El diagrama de barras muestra el número de horas de lectura de los alumnos de 4°; 5° y 6° grado. **Determina** la moda en los varones y las mujeres y da como respuesta la diferencia.

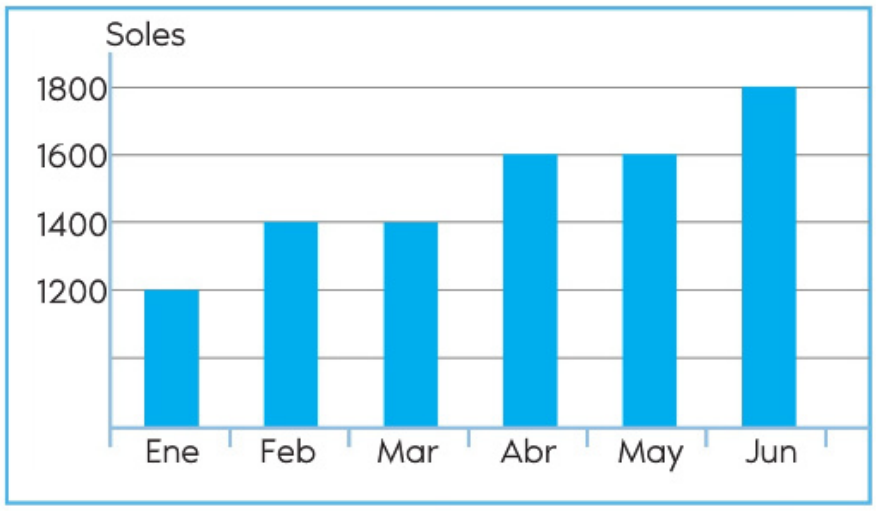





GENIOMATIC

## ENUNCIADO 1

El gráfico de barras muestra el sueldo de Lucas durante el primer semestre del año 2020.




**1** ¿En qué mes gana más?

A) enero B) abril C) junio D) mayo

**2** ¿En qué mes gana menos?

A) enero B) marzo C) junio D) mayo

**3** ¿Cuál es su sueldo promedio?

A) S/. 1 200 B) S/. 1 500
C) S/. 1 600 D) S/. 1 700

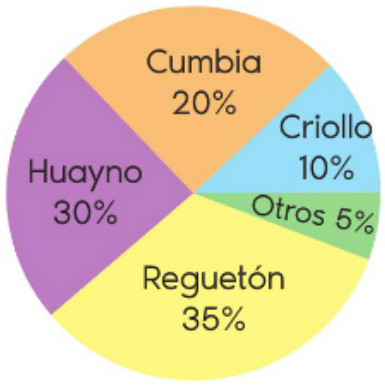
**4** ¿Cuántos meses gana más del sueldo promedio?

A) 1 B) 3 C) 2 D) 4

## ENUNCIADO 2

A 200 alumnos del colegio de David les hicieron una encuesta sobre sus preferencias musicales.

Con los datos obtenidos David elaboró el siguiente gráfico.




**5** ¿Cuántos encuestados prefieren música criolla?

A) 20 B) 25 C) 30 D) 35

**6** ¿Cuántos encuestados prefieren huayno?

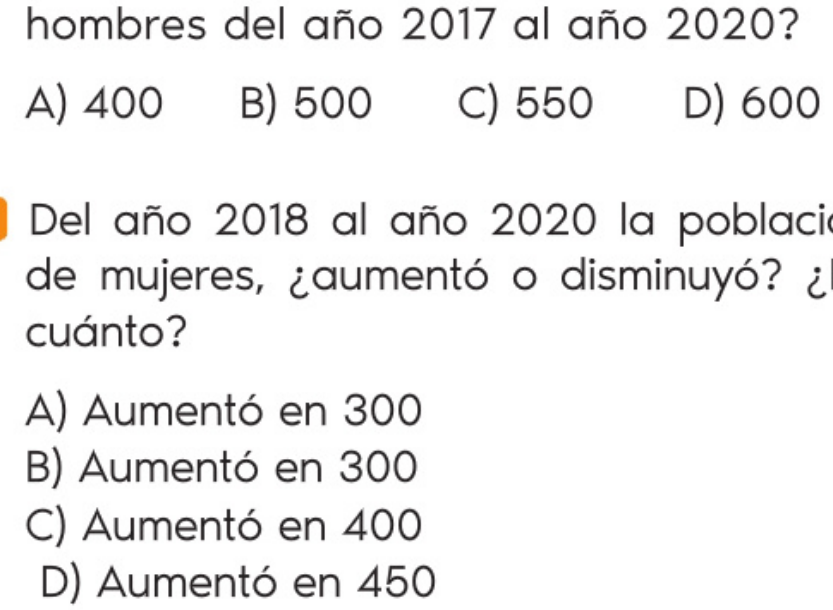
A) 25 B) 45 C) 60 D) 30

**7** ¿Cuántos encuestados prefieren regetón?

A) 20 B) 25 C) 30 D) 70

## ENUNCIADO 3

El gráfico muestra la población de hombres y mujeres de cierta localidad, durante el periodo 2017 - 2020.




**8** ¿Cuál fue la población en el 2017?

A) 600 B) 700 C) 750 D) 650

**9** ¿Cuál fue la población en el 2019?

A) 1500 B) 1400 C) 1300 D) 1600

**10** ¿En cuánto aumenta la población de hombres del año 2017 al año 2020?

A) 400 B) 500 C) 550 D) 600

**11** Del año 2018 al año 2020 la población de mujeres, ¿aumentó o disminuyó? ¿En cuánto?

A) Aumentó en 300
B) Aumentó en 300
C) Aumentó en 400
D) Aumentó en 450

**12** Del año 2017 al año 2020, ¿en cuánto aumentó la población?

A) 1250 B) 1200 C) 1000 D) 1100

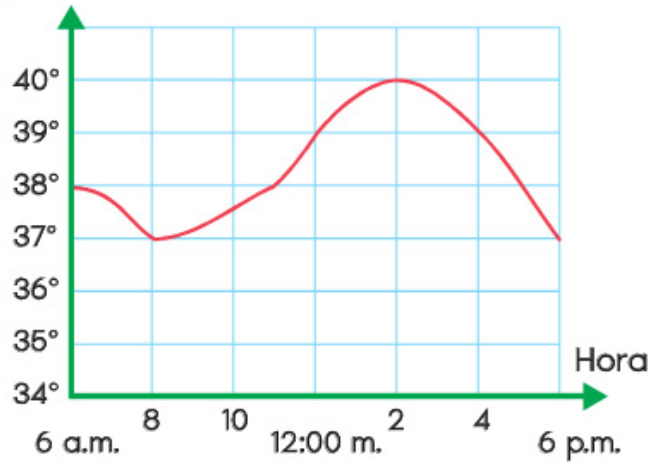
**13** Calcula la media aritmética de las notas obtenidas en Matemáticas por 10 alumnos del 6to grado en el Tercer Bimestre.

Notas: 13; 14; 12; 15; 13; 11; 10;15; 12 y 14.

A) 13 B) 12 C) 14 D) 12,9

## ENUNCIADO 4

Pierito enfermó y lo llevaron al hospital del niño. La enfermera le tomó la temperatura apenas llegó y luego cada cierto tiempo, representando los datos en el gráfico que se muestra.




**14** ¿A qué hora alcanzó la temperatura máxima?

a) 1 p.m. b) 2 p.m.
c) 3 p.m. d) 4 p.m.

**15** ¿Durante qué período el paciente estuvo con más de 38° C de temperatura?

A) De 10 a.m. a 5 p.m.
B) De 11 a.m. a 5 p.m.
C) De 2 p.m. a 6 p.m.
D) De 11 a.m. a 6 p.m.

**16** ¿Cuál fue aproximadamente la temperatura de Pierito a las 11 a.m.?

a) 37° b) 38° c) 38,5° d) 39°

**17** ¿Cuál fue la temperatura que más veces se presentó en el paciente?

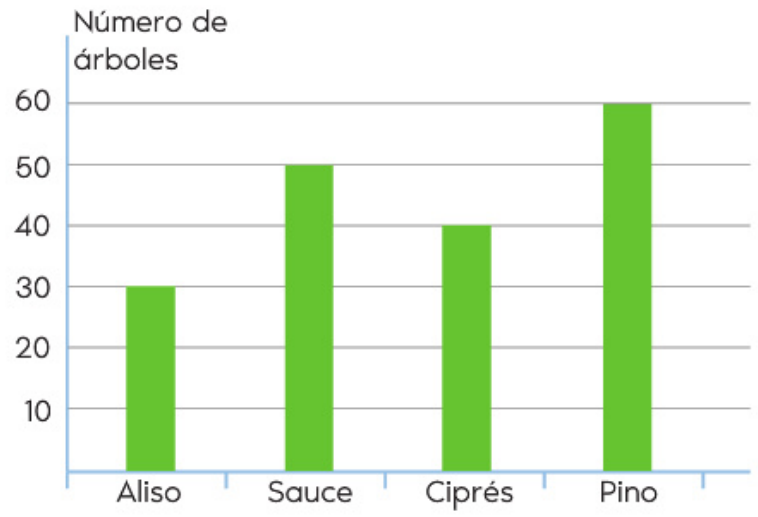
36° b) 37° c) 38° d) 39°

**18** ¿A qué hora alcanzó Pierito la temperatura mínima luego del mediodía?

A) 8 a.m. B) 3 p.m. C) 4 p.m. D) 6 p.m.

## ENUNCIADO 5

Marcos ha hecho un recuento de los árboles talados en su localidad durante el año pasado y lo ha graficado tal como se muestra.




**19** ¿Qué especie de árbol fue el más talado?

**20** ¿Qué porcentaje de los árboles talados representa el pino talado?

**21** ¿Cuál es la diferencia entre el número de árboles más talados y los menos talados?

**22** ¿Cuántos árboles fueron talados en total?

**23** Calcula la media, la mediana y la moda de los siguientes datos:
6; 7; 4; 5; 4; 9; 6; 4; 7; 12; 10; 7; 11; 7; 6; 7; 10; 7; 4; 3

**24** Dadas las edades de algunos niños de primaria: 4; 6; 7; 7; 7; 8; 8; 9
la media aritmética, la mediana y la moda son:

**25** Carlos obtuvo en Matemáticas las notas
12; 15; 16; 18 y 14

El profesor le ha propuesto rendir un último examen y sustituir la nota mas baja con la que obtenga. Carlos aceptó la propuesta y logró incrementar su promedio en 1. ¿Qué nota obtuvo en la prueba adicional?

# Autoevaluación

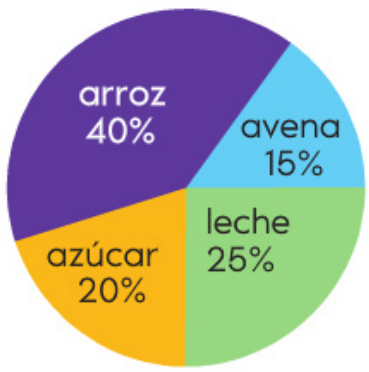
**1** La tabla muestra la venta de aves de una granja en el último mes.

| Ave | Cantidad |
|---|---|
| Gallinas | 600 |
| Patos | 250 |
| Pavos | 150 |

Elabora un pictograma.

**2** Las notas de Matemática de Emilia en los primeros tres bimestres son 14; 12 y 16. ¿Qué nota debe obtener en el cuarto bimestre para aumentar su promedio actual en una unidad?

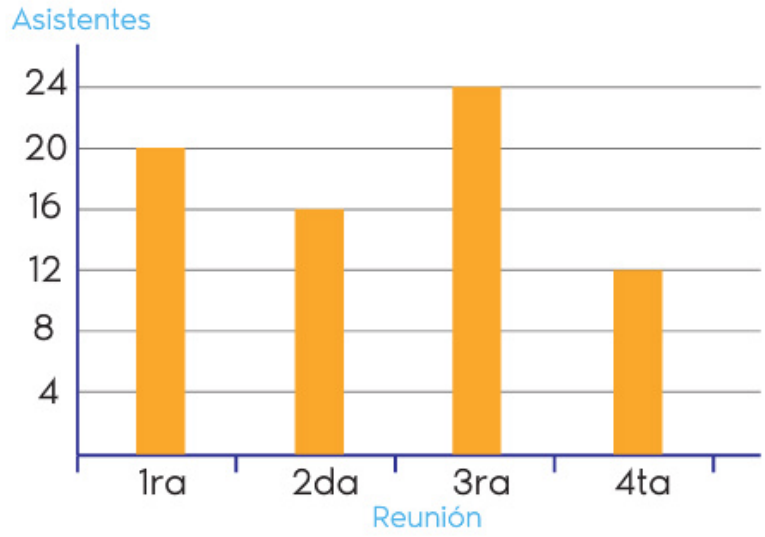
**3** Alicia tiene una bodega y ha elaborado el gráfico de las ventas (en soles) de una semana de los productos de mayor consumo.




Si la venta de leche es 180 soles, ¿cuánto obtuvo por la venta de arroz?

**ENUNCIADO**

Los siguientes datos corresponden a la asistencia a la reunión de padres de familia del salón de Jacquelín durante cuatro ocasiones.




**4** Si son 30 padres, ¿cuál es el mayor porcentaje de asistencia registrada?

**5** ¿Qué porcentaje de asistencia se obtuvo en la última reunión?

**6** ¿Cuál es el porcentaje medio de ausentismo de los padres?

Descarga una aplicación para escanear códigos QR en la tienda de tu Smartphone para ver las lecciones de este libro en video.

*Edición Digital*
*2021*

GENIO MATIC
**INFORMES Y PEDIDOS**
Jr. Flosferri 616 - Lima 36
(01) 767 0437
912 841 287
geniomaticeirl@gmail.com